

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。


國立清華大學 110 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所
乙組

科目代碼：4801

考試科目：微積分

— 作答注意事項 —

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「 由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 110 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所 碩士班 乙組

考試科目 (4801)：微積分

共 1 頁，第 1 頁 *請在【答案卷】作答

第一題填充部分，請將答案依照題號順序寫在答案卷上，不必寫演算過程。

第二至六題必須詳細寫出計算及證明過程，否則不予計分。

1. Fill in the blank with your answer (7 pts each)

(a) Find the maximum value of $x + y + 3z$ if $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 13$. Ans: _____.

(b) If $f(x, y) = \sqrt[3]{x^3 + xy + y^3}$, find $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$. Ans: _____.

(c) Find the indefinite integral $\int \ln\left(\frac{x}{x+1}\right) dx$. Ans: _____.

(d) Find the indefinite integral $\int x \tan^{-1} x dx$. Ans: _____.

(e) Evaluate the double integral $\int_0^{\sqrt{2}} \int_y^{\sqrt{4-y^2}} \frac{1}{1+x^2+y^2} dx dy$. Ans: _____.

(f) Solve the initial-value problem: $y' + y = e^{-x} \cos x$, $y(0) = 1$. Ans: _____.

2. (9 pts) For what values of the constants a and b is $(\frac{\pi}{4}, 1)$ a point of inflection of the curve

$$y = ax + b \sin x + \cos x ?$$

3. (10 pts) Determine whether the series

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4^n n! n!}{(2n)!}$$

is convergent or divergent.

4. (12 pts) Let $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ be a continuously differentiable function.

(a) Show that $\frac{f(0)+f(1)}{2} = \int_0^1 f(x) dx + \int_0^1 (x - \frac{1}{2}) f'(x) dx$.

(b) Show that $\left| \frac{f(0)+f(1)}{2} - \int_0^1 f(x) dx \right| \leq \frac{1}{4} \max_{0 \leq x \leq 1} |f'(x)|$.

5. (12 pts) If the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is to enclose the circle $x^2 + y^2 = 2y$, what values of a and b minimize the area of the ellipse?

6. (15 pts)

(a) Show that the function

$$f(x) = \frac{(x-1)^{x-1} x^x}{(x-\frac{1}{2})^{2x-1}}$$

is monotone decreasing on $(1, \infty)$.

(b) Find $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x)$ and $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$.