


**注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。**

國立清華大學 108 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所 乙組

考試科目(代碼)：微積分(4901)

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷(卡)上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 作答中如有發現試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清(含未依範例畫記)致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 108 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所乙組(0549)

考試科目 (4901)：微積分

共 1 頁，第 1 頁 *請在【答案卷】作答

第一題填充部分，請將答案依照題號順序寫在答案卷上，不必寫演算過程。第二至六題必須詳細寫出計算及證明過程，否則不予計分。

1. Fill in the blank with your answer (7 pts each)

(a) $\lim_{k \rightarrow 0^+} (1 + 3k)^{1/k} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(b) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1-x) + \sin x}{\sin^2 x} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(c) $\int_0^1 \frac{dx}{(1+\sqrt{x})^4} = \underline{\hspace{2cm}}$.

(d) If $f(x) = \sqrt{x^3 + 4x + 4}$, find $(f^{-1})'(3)$. Ans: = $\underline{\hspace{2cm}}$.

(e) Find the absolute maximum value of $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-x+1}$ on the interval $[0, 3]$. Ans: = $\underline{\hspace{2cm}}$.

(f) Find the length of the arc $y = \ln(1-x^2)$, $0 \leq x \leq 1/2$. Ans: = $\underline{\hspace{2cm}}$.

2. (10 pts) Find all the values of x for which the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \left(\frac{x-1}{x}\right)^n$ converges.

3. (10 pts) Solve the differential equation

$$dy + \frac{y - \cos x}{x} dx = 0.$$

4. (12 pts) Evaluate the double integral

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{1-(x-1)^2}} \frac{x+y}{x^2+y^2} dy dx.$$

5. (12 pts) If $0 < x < \pi/2$, prove that

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sin x}{x} < 1.$$

6. (14 pts) Let $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

(a) Prove that $\frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$ and $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)$ exist at every point of \mathbb{R}^2 .

(b) If f continuous at $(0, 0)$?