注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 112 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：計量財務金融學系
乙組(財務工程組)

科 目 代 碼 ：5203

考 試 科 目 ：微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「**國立清華大學試場規則及違規處理辦法**」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 112 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：計量財務金融學系 乙組

考試科目（代碼）：微積分（5203）

　　*請在【答案卷】作答

Problem 1 (40%).

(i)[5%] For $n = 1, 2, \ldots,$ define $a_n := \sup\{-n, -n-1, \ldots, \}$. Determine the $\lim_{n\to\infty} a_n$.

(ii)[5%] Let $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with $g(x) := x^2$. Find the inverse image $g^{-1}([4, 9])$.

(iii)[5%] Let $f(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-(x-1)^2/2)$. Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} (x-1)^2 f(x)dx$.

(iv)[5%] Define a function $f(x, y) := \begin{cases} 8xy & 0 < x < y < 1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$. Find $\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} xy^2 f(x, y)dxdy$.

(v)[5%] Let $b, c \in \mathbb{R}$ and $\psi : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ be a function satisfying $\lim_{n\to\infty} \psi(n) = 0$. Evaluate the following limit

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{n} + \frac{\psi(n)}{n}\right)^{nc}.$$

(vi) [5%] Let $x \in \mathbb{R}$. Evaluate $\lim_{n\to\infty} \frac{x^n}{n!}$.

(vii) [5%] Find the third-order Taylor polynomial of $f(x) := \sqrt{1+x}$ about $x = 0$.

($viii$) [5%] Let $C := \{x : x > 0 \text{ and } x^2 > 3\}$. Determine $\sup C$ and $\inf C$.

Problem 2 (20%).

(i)[5%] State the mean value theorem (MVT).

(ii)[15%] Use the MVT to show that $e^x \geq x$ for all $x > 0$.

Problem 3 (10%). Consider a maximization problem: $\max_x f(x, a)$ with a being a parameter. Let $x^*(a) := \arg\max_x f(x, a)$; i.e., $x^*(a)$ maximizes f. Inserting $x^*(a)$ back into $f(x, a)$ yields the so-called *value* function

$$f^*(a) = f(x^*(a), a).$$

(i)[3%] Assuming that $f^*(a)$ is differentiable, find the total derivative $\frac{d}{da} f^*(a)$.

(ii)[7%] Suppose that $x^*(a)$ is an interior point in the domain of variation for x. Find $\frac{d}{da} f^*(a)$.

Problem 4 (10%). Let Γ be a function defined by the following integral

$$\Gamma(\alpha) := \int_0^{\infty} t^{\alpha-1} e^{-t} dt.$$

(i)[5%] Show that $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ for $\alpha > 0$.

(iii)[5%] For any integer $n > 0$, show that $\Gamma(n) = (n-1)!$.

Problem 5 (20%). Let $\{x_n\}$ be a sequence with $x_n \geq 0$ for all n. Prove or disprove the following statement: $\prod_{n=1}^{\infty} (1 + x_n)$ converges if and only if $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ convergences.