國 立 清 華 大 學 命 題 紙

99 學年度 經濟學系 碩士班入學考試

科目 微積分與統計 科目代碼 4103 共 2 頁，第 1 頁 *請在【答案卷卡】作答

1. [18 points] Answer the following questions:
   a. Show that there is a root of equation $4x^3 - 6x^2 + 3x - 2 = 0$ between 1 and 2.
   b. If $y = u^3 + u^2 + 1$ where $u = 2x^2 - 1$, find $\frac{dy}{dx}$ evaluated at x=2.
   c. Determine where the curve $y = x^3 - 3x + 1$ is concave upward and where it is concave downward. Find the inflection points.
   d. Find $F'(x)$ if $F(x) = \sqrt{x^2 + 1}$.
2. [12 points] Determine whether the following series converge or diverge.
   a. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{8}{3n^2+n+1}$
   b. $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^2}{n^3+1}$
3. [12 points] Evaluate the following integrals.
   a. $\int_{-\infty}^{0} xe^x dx$
   b. $\int \frac{x-1}{x+1} dx$
4. [8 points] You are given the differential equation $y' = \frac{xy+y^2}{x^2}$. Is this equation homogenous? Solve this differential equation.

國立清華大學命題紙

99學年度 經濟學系 碩士班入學考試

科目 微積分與統計 科目代碼 4103 共 2 頁，第 2 頁 *請在【答案卷卡】作答

5. [10分] 設 W 為一連續隨機變數，其密度函數為：

$$f(w) = cw(2-w),\quad 0 \le w \le 2。$$

(A) 求常數 c.

(B) 求 E(W) 及 var(W).

6. [10分] 對多元線性回歸模型 (multiple linear regression model)：

$$Y_i = X_i'\beta+\varepsilon_i \qquad (i = 1,2,\ldots,n),$$

若 $E(X_i\varepsilon_i) \neq 0$，假定 Z_i 可以作為 X_i 合適的工具變數 (instrumental variable)，

且 $var(\varepsilon_i|Z_i) = \sigma^2$。 試導出工具變數估計量，並給出它的極限分佈。

7. [15分] 考慮個體經濟學中的供需模型如下：

(供給) $Q_i = \alpha_1 + \alpha_2 P_i + \alpha_3 P_{i-1} + \varepsilon_i$

(需求) $Q_i = \beta_1 + \beta_2 P_i + \beta_3 Y_i + u_i$

其中，Q_i 是商品供給或需求量，P_i 是商品價格，Y_i 是收入。

(A) 如某經濟學家說 Q_i 與 P_i 為內生變數 (endogenous variables)，P_{i-1} 與 Y_i 為外生變數 (exogenous variables)，她的判斷標準應該是什麼？

(B) 試寫出模型的簡約方式 (reduced form)。

(C) 供給方程或/和需求方程是否可識別的 (identified) ？試寫出你的判斷理由。

8. [15分] 在簡單線性回歸模型 (simple linear regression model) 中，設 $var(u_i) = \sigma_i^2$。

(A) 試證明 $var(\hat{\beta}_{OLS}) = [\sum(x_i-\bar{x})^2]\sigma_i^2/[\sum(x_i-\bar{x})^2]^2$，$var(\hat{\beta}_{WLS}) = 1/[\sum(x_i-\bar{x})^2/\sigma_i^2]$。

(B) 利用 Cauchy-Schwarz 不等式或其他方法，試證明 $var(\hat{\beta}_{WLS}) \le var(\hat{\beta}_{OLS})$。