

國 立 清 華 大 學 命 題 紙

九十三學年度 生科院丙組、生科院（結構生物學程）乙組 碩士班入學考試

科目 微積分 科號 1001、1201 共 1 頁第 1 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

1. 試求下列各式極限值: (20%)

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin \pi x}{x-1}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(1 - \cos x)}{x^4}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos 2x + \tan^2 x}{x \sin x}$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{\sqrt{x+2} - \sqrt{3x-2}}{\sqrt{5x-1} - \sqrt{4x+1}}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$$

2. 試微分下列各式: (20%)

$$x^x$$

$$\sqrt{\frac{(x-1)^3}{(x^2+1)(x+1)}}$$

$$\frac{\sin x}{\sqrt{a^2 \cos^2 x + b^2 \sin^2 x}}$$

$$\sqrt{\arctan(\sinh \frac{x}{3})}$$

$$\frac{1}{2} \tanh x + \frac{\sqrt{2}}{8} \ln \frac{1 + \sqrt{2} \tanh x}{1 - \sqrt{2} \tanh x}$$

3. 試求下列各式積分: (20%)

$$\int \cos \ln x dx$$

$$\int \frac{x^2 \arctan x}{1+x^2} dx$$

$$\int \frac{x^3 + 2x^2 - x + 3}{x} dx$$

$$\int \frac{x^5}{1+x^4} dx$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x^2 - a^2)^3}}$$

4. 試求下列各式定積分: (20%)

$$\int_3^8 \frac{x dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$\int_{-a}^a x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

$$\int_a^b (x-a)(x-b) dx$$

$$\int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{2-x^2}} dx$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/4} (\sin x + \cos x)^2 dx$$

5. 在曲線 $y = \frac{a}{2}(e^{\frac{x}{a}} + e^{-\frac{x}{a}})$ ($a > 0$) 上兩點 $P(0, a)$ 與 Q , 若 P, Q 間之弧長為 $\sqrt{3}a$ 時, 求 Q 點之座標. (8%)

6. 有兩曲線 $y = x^2$, $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$ 交於點 $(1, 1)$. 設其對 x 的一階及二階微分 $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$

在 $(x, y) = (1, 1)$ 處相等, 求常數 a, b, r 的值. (12%)