


注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 108 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院 丙組

考試科目(代碼)：微積分(0601)

— 作答注意事項 —

1. 請核對答案卷(卡)上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 作答中如有發現試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清(含未依範例畫記)致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 108 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 1 頁 * 請在【答案卷】作答

1. (10%) 求極限 (limit)：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin(1)}{\cos\left(\frac{1}{2^n}\right) \cdot \cos\left(\frac{1}{2^{n-1}}\right) \cdots \cos\left(\frac{1}{2}\right)}$$

2. (10%) 給定函數

$$f(x) = \sqrt[3]{x}, \quad x > 0.$$

(A) (5%) 利用差商 (difference quotient) 取極限的方式求一階導數 $f'(2)$.

(B) (5%) 求通過 $y = f(x)$ 函數圖形上點 $(2, \sqrt[3]{2})$ 的切線方程式。

3. (15%) 假設 $[a, b]$ 為一封閉 (closed)、有界 (bounded) 的區間，而 $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 為連續函數滿足 $g(a) \neq g(b)$ 且 f, g 在 (a, b) 開區間為可微分並滿足 $g'(x) \neq 0, \forall x \in (a, b)$.

(A) (8%) 利用均值定理 (Mean Value Theorem) 證明存在一實數 $c \in (a, b)$ 滿足

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

(B) (7%) 令 $f(x) = e^x, g(x) = \ln x$. 利用 (A) 小題證明下列不等式成立：

$$e \leq \frac{e^{\sqrt{3}} - e}{\ln \sqrt{3}} \leq \sqrt{3} e^{\sqrt{3}}.$$

4. (10%) 求不定積分：

$$\int \csc^3 \theta \, d\theta.$$

5. (10%) 求下列曲線的弧長 (arc length)：

$$y = e^x, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

國立清華大學 108 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 2 頁 * 請在【答案卷】作答

6. (10%) 求下列初始值問題 (initial-value problem) 的解：

$$\begin{cases} \frac{dy}{dx} - \frac{y}{x} = \ln x \\ y(1) = 3. \end{cases}$$

7. (10%) 判斷下列數列是否收斂？

$$a_n = \sqrt[3]{2018^n + 2019^n}.$$

8. (10%) 令 $\vec{a} = (2, 1, -1)$, $\vec{b} = (3, 1, 4)$, $\vec{c} = (1, 2, 5)$ 與 $\vec{d} = (1, -3, 1)$ 為空間中的向量。

(A) (5%) 求向量 \vec{c} 與 \vec{d} 的夾角。

(B) (5%) 求 \vec{a} , \vec{b} 與 \vec{c} 三向量所展成的平行六面體之體積。

9. (A) (10%) 令 D 為 xy -平面中 $(0, 0)$, $(1, 0)$ 與 $(1, 1)$ 三點所圍成之三角形區域。求下列二重積分值：

$$\iint_D e^{x^2} dA.$$

(B) (5%) 令 $\Omega = [0, 1] \times [0, \pi] \times [2, 3]$ 。求下列三重積分值：

$$\iiint_{\Omega} z e^x \sin y dV.$$