

國立清華大學 107 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 1 頁 * 請在【答案卷】作答

1. (10%) 求極限 (limit)：

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{\sin x}.$$

2. (10%) 給定函數

$$f(x) = \frac{1}{5}x^5 - x^4 + 2x^3 - 2x^2 + 5x - 3.$$

(A) 證明存在一實數 c 滿足 $f(c) = 0$ 。

(B) 試問該實數 c 是否唯一？

3. (10%) 給定函數

$$f(x) = \frac{x^{\frac{3}{2}}(x-4)^2}{\sqrt{x^2+9}}.$$

求二階導數 (derivative) $f''(4)$ 。

4. (10%) 令 R 為曲線 $y = \sqrt{x}$ 與 x -軸在 $[0, 1]$ 區間所圍成的平面區域。求 R 繞著直線 $x = -1$ 旋轉所形成之旋轉體的體積。

5. (10%) 函數 $f: (0, \frac{\pi}{2}) \rightarrow (\frac{1}{2}, 1)$ 定義如下：

$$f(x) = \frac{1}{1 + \sin^2 x}.$$

(A) 請寫出 f 的反函數 $f^{-1}(x)$ 。

(B) $f^{-1}(x)$ 在點 $x = \frac{2}{3}$ 是否可微分？若是，請求出 $(f^{-1})'(\frac{2}{3})$ 。

國立清華大學 107 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 2 頁 * 請在【答案卷】作答

6. (10%) 求不定積分：

$$\int \frac{1}{(1+y^2)^3} dy.$$

7. (10%) 假設 p 為一實數且 $p > 1$ ，判斷下列級數是否收斂。請說明原因。

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^p}.$$

8. (10%) 給定二變數函數

$$f(x, y) = \frac{x^4 + \sin^2(2y)}{x^4 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0).$$

試問極限 $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} f(x, y)$ 是否存在？

9. (10%) 求二變數函數

$$f(x, y) = x^2 - xy - \frac{3}{4}y^2 + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{4}y^4$$

的相對極值 (relative extrema)。

10. (10%) 求下列二重積分值：

(A) $\iint_R \frac{\sin(y^3 \cos x)}{\sqrt{1+x^2+y^4}} dA$, 其中 $R = [-2, 1] \times [-3, 3]$ 。

(B) $\iint_{\Omega} e^{x^2+y^2} dA$, 其中 Ω 是單位圓 $x^2 + y^2 = 1$ 在 xy -平面第一象限所圍成的平面區域。