

國立清華大學 103 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 1 頁 * 請在【答案卷】作答

1.(10 %) 下列的敘述，那些是正確的？(複選，請說明正確或錯誤的原因)

(A) 若 $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)| = 0$ ，則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) = 0$ ，其中 c 是一個常數。

(B) 若 $\lim_{x \rightarrow c} |f(x)|$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 也存在，其中 c 是一個常數。

(C) $\lim_{x \rightarrow 2} (\frac{1}{x} - \frac{1}{2})(\frac{1}{x-2}) = 0$ 。

(D) 若 $\lim_{x \rightarrow c} f(x)$ 存在，則 $\lim_{x \rightarrow c} \sqrt{f(x)}$ 存在，其中 c 是一個常數。

(E) 若 $f(x) < g(x)$ ， $x \neq c$ ，則 $\lim_{x \rightarrow c} f(x) < \lim_{x \rightarrow c} g(x)$ ，其中 c 是一個常數。

2.(10 %)(1) 求

$$\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\sin x}{x - \pi}$$

(2) 已知函數 $f(x)$ 在 $x = 1$ 可微分，且 $f'(1) = 2$ ， $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = -1$ 。求 $f(1)$ 的值。

3.(10 %)(1) 假設函數 f 是可微分的，Leibniz 用 $\frac{df(x)}{dx}$ 表示其微分。求

$$\frac{d}{dx} f(\sin^2 5x)$$

(2) 計算

$$\int_1^e (\ln x)^2 dx$$

4.(10 %) 將 10000 元存入銀行，銀行宣布採用複利率計算，年利率是 5%。請問

(1) 如果利息是每個月算一次，一年後有多少錢？(列式即可)

(2) 如果利息是連續計算的，一年後有多少錢？(列式即可)

(3) 用 (2) 的算法，要多就時間本利和才會變成 20000？

5.(10 %) 解下列的 logistic 方程式

$$\frac{dx}{dt} = x(5 - x), x(0) = 1$$

國立清華大學 103 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 2 頁 * 請在【答案卷】作答

6.(10 %)(1) 求

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 4}}$$

(2) 求下列函數以 $(x-1)$ 展開的泰勒級數 (Taylor series)

$$f(x) = x^2 \ln x$$

7.(10 %) 判斷下列的級數是否收斂 (請說明原因)

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{13}{1 + 17^{-k}}$$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k^k}{k!}$$

8.(10 %) 求函數 $f(x, y) = xy^2$ 限制在 $x^2 + y^2 = 1$ 上的最大值。

9.(10 %)(用變數變換) 計算

$$\iiint_{\Omega} (x+y)^2 dx dy dz,$$

其中 Ω 是 $-2 \leq x \leq 2$, $-\sqrt{4-x^2} \leq y \leq \sqrt{4-x^2}$, $0 \leq z \leq 4-x^2-y^2$ 所圍成的立體。

10.(10 %) 計算

$$\oint_C (3x^2 + y) dx + (2x + y^3) dy$$

其中 C 是以圓 $x^2 + y^2 = 9$.