注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，

並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 114 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：計量財務金融學系

乙組(財務工程組)

科目代碼：5303

考試科目：微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 114 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：計量財務金融學系碩士班 乙組（財務工程組）

考試科目（代碼）：微積分（5303）

 *請在【答案卷】作答

Problem 1 (5%). Evaluate $\int_0^2 \min\{3x, 4 - x^2\} dx$.

Problem 2 (5%). A *set function* is a function that maps sets into real number. Let $A \subset (0, \infty)$ be a set. Define the set function I by

$$I(A) := \int_A e^{-x} dx.$$

Take $A_3 := (1, 4) \cup [4, 5)$. Determine whether the function satisfies $I(A_3) = I((1, 4)) + I([4, 5))$. Prove or disprove.

Problem 3 (10%). Consider the function $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ with

$$f(x) := \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x}, & x \neq 0; \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Determine whether the function f is differentiable at 0. Prove or disprove.

Problem 4 (10%). Let $x > 0$. Show that $\log(x^n) = n \log x$ for all $n \in \mathbb{N}$.

Problem 5 (10%). Let $f : [a, b] \to [a, b]$ be a continuous function. Show that there exists a point $c \in [a, b]$ such that $f(c) = c$.

Problem 6 (20%). For $\varepsilon \in (0, 1)$, consider a function

$$F(x) := \begin{cases} \frac{1-\varepsilon}{1+e^{-x}}, & \text{if } x < 0; \\ \varepsilon + \frac{(1-\varepsilon)}{1+e^{-x}}, & \text{if } x \geq 0. \end{cases}$$

(i)[10%] Determine whether the $F(x)$ is a continuous function on $\mathbb{R}$. Prove or disprove.
(ii)[10%] Determine whether the $F(x)$ is a right-continuous function on $\mathbb{R}$. Prove or disprove.

Problem 7 (10%). Let $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be a function and take $x \in \mathbb{R}$. If f is differentiable at x, determine whether f is continuous at the same point x. Prove or disprove.

Problem 8 (10%). Let $f_n(x) := \max\{0,\ 1 - n|x|\}$. Determine whether $\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ exist and converges to a continuous function f. Prove or disprove.

Problem 9 (10%). Let $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a bounded increasing sequence on $\mathbb{R}$. Determine whether $\lim_{n\to\infty} x_n$ exists. Prove or disprove.

Problem 10 (10%). Let f and g be continuous nonnegative functions on $[a, b]$, and let $C > 0$. Suppose that for $x \in [a, b]$, we have

$$f(x) \leq C + \int_a^x f(t)g(t)dt.$$

Show that $f(x) \leq Ce^{\int_a^x g(t)dt}$.