注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，

並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 113 學年度碩士班考試入學試題
系所班組別：計量財務金融學系 乙組(財務工程組)
科 目 代 碼 ：5103
考 試 科 目 ：微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「⬇ 由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 113 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：計量財務金融學系碩士班 乙組(財務工程組)

考試科目（代碼）：微積分（5103）

 *請在【答案卷】作答

Problem 1 (5%). Determine if the limit $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+y^2}$ exists or not.

Problem 2 (5%). Suppose $\{a_n\}$ is defined by

$$a_n = \begin{cases} 1 + \frac{1}{n} \text{ if } n \text{ is even} \\ 2 + \frac{1}{n} \text{ if } n \text{ is odd.} \end{cases}$$

Find $\limsup_{n\to\infty} a_n$ and $\liminf_{n\to\infty} a_n$.

Problem 3 (5%). Let $f(t)$ be a continuous function with $t \in [0,T]$ and take $r \geq 0$. Define $K(r) := \int_0^T f(t)e^{-rt}dt$. Find $\frac{d}{dr}K(r)$.

Problem 4 (5%). Evaluate $\int_{-\infty}^{\infty} |x| \frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2} dx$.

Problem 5 (5%). Let $p > 0$ and $b \in \mathbb{R}$. Determine if the the sum $\lim_{N\to\infty} \sum_{k=0}^{N} b(1 + \frac{p}{100})^{-k}$ exist. Justify your answer.

Problem 6 (5%). Evaluate $\iint_D (x + 2y)dxdy$ where D is the region bounded by the parabolas $y = 2x^2$ and $y = 1 + x^2$.

Problem 7 (10%). Let $f : \mathbb{R} \times [-1, 2] \to \mathbb{R}$ with $f(x, y) := xy^2$. Solve the problem

$$V(x) := \max_{y\in[-1,2]} f(x, y)$$

Problem 8 (20%). Let $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence of real numbers. Prove or disprove the statement: If the series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ is convergent, then $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Problem 9 (20%). Prove or disprove the following statement: If f is monotonically increasing on $[a, b]$, then f is of bounded variation on $[a, b]$; i.e., for any set of points $\{x_0, \ldots, x_n\}$ satisfying $a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, there exists a constant $M > 0$ such that

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x_k) - f(x_{k-1})| \leq M.$$

Problem 10 (20%). Suppose that $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is continuously differentiable in an open set containing $[\mathrm{x}, \mathrm{y}] := \{\lambda\mathrm{x} + (1-\lambda)\mathrm{y} : \lambda \in [0, 1]\}$. Show that there exists a point $\mathrm{w} \in (\mathrm{x},\mathrm{y}) := \{\lambda\mathrm{x} + (1-\lambda)\mathrm{y} : \lambda \in (0, 1)\}$ such that

$$f(\mathrm{x}) - f(\mathrm{y}) = \nabla f(\mathrm{w})^{\mathsf{T}}(\mathrm{x} - \mathrm{y})$$

where $(\cdot)^{\mathsf{T}}$ means vector transpose.