

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 110 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：計量財務金融學系
乙組(財務工程組)

科目代碼：5003

考試科目：微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷(卡)上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清(含未依範例畫記)致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 110 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：計量財務金融學系碩士班 乙組

考試科目（代碼）：微積分(5003)

共 1 頁，第 1 頁 *請在【答案卷】作答

Total: 100 points

Part I: Fill in blanks. (30 points; 10 points for each blank)

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \sum_{j=1}^n 1/(3n+j) = \underline{\hspace{2cm}}$.
2. Solve $\frac{dy}{dx} = \frac{5x}{9y}$ to obtain $y = \underline{\hspace{2cm}}$.
3. Find the equation of the normal line to the surface $x^2 + y^2 = z^2$ at $(3, 4, 5)$: $\underline{\hspace{2cm}}$.

Part II: Multiple choices (18 points; 6 points each)

1. The coefficient of the x^2 term in the Taylor series of 2^x expanded at $x = 0$ is
(a) $(\ln 2)^2/2^2$ (b) $(\ln 2)^2/2$ (c) $\ln 2/2$ (d) $\ln 2/2^2$
2. $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} 2xy^2/(x^2+y^2) =$
(a) 2 (b) 1 (c) 0 (d) ∞
3. $\lim_{u \rightarrow +\infty} (1 + 1/u)^u =$
(a) 1 (b) ∞ (c) $\exp(1)$ (d) $\ln(1)$

Part III: Calculation and Proof. (Show your works) (52 points)

1. (16 points) The Melline transform of a function $f(x)$ is known as $M_f(s) = \int_0^\infty x^{s-1} f(x) dx$. Given $f(x) = \exp(-x)$, the Gamma function is defined by $\Gamma(s) = M_{\exp(-x)}(s) = \int_0^\infty x^{s-1} \exp(-x) dx$.
(a) For $p > 0$, $f(x) = \exp(-px)$, show that $M_f(s) = \frac{1}{p^s} \Gamma(s)$.
(b) For $p > 0$, $f(x) = \exp(-x^p)$, show that $M_f(s) = \frac{\Gamma(s/p)}{p}$.
2. (12 points) Given a natural logarithmic function $\ln y$, for variables $y > 0$ and $x > 0$, calculate the right-hand side of the equation below is equal to the left-hand side.
$$-\ln \frac{y}{x} + \frac{y}{x} - 1 = \int_x^\infty (y-k)^+ \frac{dk}{k^2} + \int_0^x (k-y)^+ \frac{dk}{k^2},$$
where $z^+ = \max\{z, 0\}$.
3. (24 points) Given a set of probabilities $P = \{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ for each nonnegative $p_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n$, and $\sum_{i=1}^n p_i = 1$, the (Shannon) entropy is defined by $H(P) = -\sum_{i=1}^n p_i \ln p_i$.
(a) Prove that $H(P) \geq 0$.
(b) What would make $H(P) = 0$?
(c) What is the maximum of $H(P)$?