

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：經濟學系

科目代碼：4703

考試科目：微積分與統計

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 提早交卷者不可攜出試題，請將試題連同答案卷（卡）交予監考人員，攜出將以違規論處。當節考試結束後試題將置於講台，可自行取回，本試場不負保管責任。
7. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：經濟學系碩士班

考試科目（代碼）：微積分與統計(4703)

共 2 頁，第 1 頁 *請在【答案卷】作答

Part I. 微積分

1. (5 pts) Consider a two-factor constant elasticity of substitution (CES) production function with capital K , labor L , total factor productivity A ,

$$Y = A(\alpha K^\gamma + (1 - \alpha)L^\gamma)^{1/\gamma}$$

where $0 < \alpha < 1$.

Prove that the limit of the function with $\gamma \rightarrow 0$ is a Cobb-Douglas function:

$$Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$$

2. (5 pts) Evaluate $M_X(t) = \int_0^\infty e^{tx} \cdot \lambda e^{-\lambda x} dx$.
3. (10 pts) Evaluate $\int_0^\infty x^3 e^{-x^2} dx$.
4. (10 pts) Is the function $f(x) = \sqrt{x}$ for $x \geq 0$ continuous at $x_0 = 0$? Please prove your claim.
5. (10 pts) Use the definition of the derivative to prove the product rule of differentiation.
6. (10 pts) A fixed point of a function $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ is a point $c \in [0,1]$ such that $f(c) = c$. Please prove that every continuous function $f: [0,1] \rightarrow [0,1]$ has a fixed point.

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：經濟學系碩士班

考試科目（代碼）：微積分與統計(4703)

共 2 頁，第 2 頁

*請在【答案卷】作答

Part II. 統計

1. [10 points] Give the definitions of the following terms:

- (a) Sample space.
- (b) Central limit theorem.

2. [10 points] Let $X_n \sim \text{Binomial}(n, p)$, $n, p > 0$, prove that $\text{Var}(X_n) = ?$

3. [10 points] Given the probability mass function of X as follows, what is the moment-generating function of X ?

X	1	2	3
$\text{Prob}(X)$	1/2	1/6	1/3

4. [10 points] Which of the following are linear in probability (pick all that apply)?

- (a) $E(X^2)$ (b) $\text{Var}(X)$ (c) Moment-generating function of X (d) $\sqrt{\text{Var}(X)}$

5. [10 points] Explain the reason or the situation for using the K -fold cross-validation technique (rather than using all the samples at once) to estimate the model parameters?