

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系

科目代碼：0102

考試科目：線性代數

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 提早交卷者不可攜出試題，請將試題連同答案卷(卡)交予監考人員，攜出將以違規論處。當節考試結束後試題將置於講台，可自行取回，本試場不負保管責任。
7. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系碩士班數學組、應用數學組

考試科目（代碼）：線性代數（0102）

共 2 頁，第 1 頁 * 請在 [答案卷] 作答

Notation. $\mathbb{N}$: the set of positive integers; $\mathbb{R}$: the field of real numbers;

$M_{m \times n}(\mathbb{R})$: the set of m -by- n matrices with entries in $\mathbb{R}$; $M_n(\mathbb{R}) = M_{n \times n}(\mathbb{R})$.

It is required to show your work in all problems.

1.(20 %) Let

$$S = \{(2, -4, -3, 3, -2), (2, 1, 2, -3, -2), (3, -1, -1, -1, -1), (2, 1, -1, -2, 2)\} \subset \mathbb{R}^5.$$

(1) Let W be the subspace of $\mathbb{R}^5$ spanned by S . Find a subset of S which is a basis for W .

(2) Let W' be the following subspace of $\mathbb{R}^5$:

$$W' := \{(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 0\},$$

and let $S' = S \cap W'$. Extend S' to a basis for the subspace W' .

2.(15 %) Let V be a finite dimensional vector space over $\mathbb{R}$. Given a linear operator $T: V \rightarrow V$, show that $R(T) \cap N(T) = \{0\}$ if and only if $\text{rank}(T^n) = \text{rank}(T)$ for some integer $n \geq 2$. (Here $R(T)$ and $N(T)$ are the range and the null space of T , respectively.)

3.(15 %) Let $m, n \in \mathbb{N}$. Given a nonzero matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \in M_{m \times n}(\mathbb{R}),$$

show that $\text{rank}(A) = k$ if and only if there exist integers $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq m$ and $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ so that the determinant of the matrix

$$\begin{pmatrix} a_{i_1 j_1} & \cdots & a_{i_1 j_k} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i_k j_1} & \cdots & a_{i_k j_k} \end{pmatrix} \in M_k(\mathbb{R})$$

is nonzero.

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系碩士班數學組、應用數學組

考試科目（代碼）：線性代數（0102）

共 2 頁，第 2 頁 * 請在 [答案卷] 作答

4.(15 %) Given two symmetric matrices $A, B \in M_n(\mathbb{R})$, suppose AB is also symmetric. Show that there exists an orthogonal matrix $U \in M_n(\mathbb{R})$ so that UAU^{-1} and UBU^{-1} are both diagonal matrices.

5.(15 %) Determine the number of orthogonal matrices $A \in M_5(\mathbb{R})$ satisfying

$$A^3 - 5A + 2I_5 = 0.$$

(Here I_5 is the identity matrix in $M_5(\mathbb{R})$.)

6.(20 %) Let

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in M_3(\mathbb{R}).$$

Determine whether A and B are similar over $\mathbb{R}$. If so, find an invertible matrix $U \in M_3(\mathbb{R})$ so that $U^{-1}AU = B$.