

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系

科目代碼：0101

考試科目：高等微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷(卡)上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清(含未依範例畫記)致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 提早交卷者不可攜出試題，請將試題連同答案卷(卡)交予監考人員，攜出將以違規論處。當節考試結束後試題將置於講台，可自行取回，本試場不負保管責任。
7. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系碩士班數學組、應用數學組

考試科目（代碼）：高等微積分（0101）

共 2 頁，第 1 頁 * 請在 [答案卷] 作答

It is required to show your work in all problems.

1. (10 %) Let $A := \{\log_2 n - \lfloor \log_2 n \rfloor : n = 1, 2, 3, \dots\}$, where $\lfloor x \rfloor$ denotes the greatest integer less than or equal to x . Find $\sup A$ and $\inf A$.

2. (10 %) Find the set of limit points of $S + T = \{s + t : s \in S, t \in T\}$, where $S = \{\frac{1}{n} : n = 1, 2, 3, \dots\}$ and $T = \{e^{-n} : n = 0, 1, 2, 3, \dots\}$.

3. (10 %) Find $\limsup_{n \rightarrow \infty} a_n$ and $\liminf_{n \rightarrow \infty} a_n$, where the sequence $\{a_n\}_{n \geq 1}$ is defined by

$$a_1 = 0, \quad a_{2m} = \frac{a_{2m-1}}{2}, \quad a_{2m+1} = \frac{1}{2} + a_{2m} \quad \text{for all } m = 1, 2, 3, \dots$$

4. (20 %) Let $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ be defined by

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in \{0\} \cup (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}), \\ \frac{1}{n^{\pi/3}}, & x = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}, \gcd(m, n) = 1, n \geq 1. \end{cases}$$

(a) (10%) (Prove or disprove) f is continuous at $x = 0$.

(b) (10%) (Prove or disprove) f is differentiable at $x = 0$.

5. (10 %) Evaluate the following Riemann–Stieltjes integral: $\int_1^2 \ln y d\lfloor y^2 \rfloor$, where $\lfloor x \rfloor$ denotes the greatest integer less than or equal to x .

6. (15 %) Prove that the series $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{x^2+n}{n^2} \right)$ converges uniformly on every closed interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$, but does not converge absolutely for any value of x .

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系碩士班數學組、應用數學組

考試科目（代碼）：高等微積分（0101）

共 2 頁，第 2 頁 * 請在 [答案卷] 作答

7.(10 %) Prove that $f(x) = \sin(x + \pi \cos x)$ is uniformly continuous on $\mathbb{R}$.

8.(15 %) Let g be a smooth function, and $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ is defined by

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = g(r), \quad \text{where } r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

For $x \neq 0$, express the Laplacian of f in terms of g :

$$\Delta f(x_1, x_2, \dots, x_n) := \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}(x_1, x_2, \dots, x_n).$$