注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 111 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系

科 目 代 碼 ：0101

考 試 科 目 ：高等微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「**國立清華大學試場規則及違規處理辦法**」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 111 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系碩士班

考試科目（代碼）：高等微積分（0101）

　　*請在【答案卷、卡】作答

1. (10%) Find
$$\lim_{n\to\infty}\int_3^n (1-\frac{x}{n})^n dx$$

2. (10%) Let $f:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ be defined by
$$f(x)=\frac{1}{x}$$
Is f a continuous function? Prove your claim.

3. (15%) Consider $\mathbb{Q}$ as a topological subspace of $\mathbb{R}$ where $\mathbb{R}$ is given the Euclidean topology. Let $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{R}$ be a continuous function and $A\subset\mathbb{Q}$ be a compact subset. Must $f(A)$ be compact in $\mathbb{R}$? Prove or give a counterexample.

4. (15%) Construct a sequence of Riemann integrable functions $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ which converges pointwise to a function $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ but
$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 f_n(x)dx\neq\int_0^1 f(x)dx$$

5. (15%) Let $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ be defined by
$$f(x,y):=\begin{cases}(\frac{\sin(x^2+y^2-1)}{x^2+y^2-1},\ \cos(x^2+y^2-1)), & \text{if } x^2+y^2\neq 1\\ (1,1), & \text{if } x^2+y^2=1\end{cases}$$
Is f differentiable at $(1,0)$? Prove your claim.

6. Let
$$E=\{\sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k+1} | n\in\mathbb{N}\cup\{0\}\}$$
be the set of polynomials of odd degree in each term defined on $[1,2]$.
   (a) (10%) Show that E is not closed in $\mathscr{C}^0([1,2])$ where $\mathscr{C}^0([1,2])$ is the space of continuous functions from $[1,2]$ to $\mathbb{R}$ with the sup norm.
   (b) (10%) Is E dense in $\mathscr{C}^0([1,2])$? Prove your claim.

7. (15%) Given a continuous function $h:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ such that
$$\sup_{x\in[0,1]}\{\int_0^1 |h(x,y)|dy\}<1$$
Suppose that $g:[0,1]\to\mathbb{R}$ is a continuous function. Show that there is a unique continuous function $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ such that
$$f(x)-\int_0^1 h(x,y)f(y)dy=g(x)$$