注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，

並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 110 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系

科 目 代 碼 ：0101

考 試 科 目 ：高等微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「**國立清華大學試場規則及違規處理辦法**」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 110 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系碩士班

考試科目（代碼）：高等微積分（0101）

　　*請在【答案卷、卡】作答

1. (10%) Calculate

$$\int_0^2 x\sin(3x+1)\sin(4x+1)dx$$

2. (10%) Calculate the line integral

$$\int_C \frac{xdy - ydx}{x^2+y^2}$$

where C is the positive oriented curve in $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$ parametrized by

$$\varphi(\theta) = \begin{cases} (\cos 4\pi\theta,\ \sin 4\pi\theta), & \text{if } \theta \in [0, \frac{1}{2}]; \\ (2-\cos 4\pi\theta,\ -\sin 4\pi\theta), & \text{if } \theta \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

3. (10%) Determine if

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\cos\frac{x}{n}$$

converges uniformly on $[-\pi, \pi]$.

4. (10%) Show that the function $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ defined by

$$f(x,y) = \frac{1}{10}(\sin^2(3x+y),\ \cos(4x+2y))$$

has a fixed point.

5. (10%) Show that the set

$$X = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 | x_1^2 + 2x_2^4 + 3(e^{x_1} + x_3^2)^6 = 2021\}$$

is compact.

6. (10%) Let X be a topological space and $A, B \subset X$ be compact subsets. Is $A \cup B$ always a compact set? Prove or give a counterexample.

7. (10%) Let $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ be a function defined by

$$f(x, y, z) = \frac{x^2 \sin x}{x^2 + y^2 + z^2}$$

for $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 - \{0\}$. Can f be extended to a differentiable function on $\mathbb{R}^3$?

8. Let $\mathscr{C}^0([0, \pi]) := \{f : [0, \pi] \to \mathbb{R} | f \text{ is continuous }\}$ with the sup norm.

   (a) (10%) Is the family $\{\cos(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ equicotinuous on $[0, \pi]$?

   (b) (10%) Does the sequence $\{\cos(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathscr{C}^0([0, \pi])$ have a convergent subsequence?

   (c) (10%) Is the family $\{\frac{1}{n} \sin(nx)\}_{n=1}^{\infty}$ in $\mathscr{C}^0([0, \pi])$ compact?