注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，

並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 109 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系

科 目 代 碼 ：0102

考 試 科 目 ：線性代數

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 作答中如有發現試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「➘由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「**國立清華大學試場規則及違規處理辦法**」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 109 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：數學系碩士班

考試科目（代碼）：線性代數（0102）

　　*請在【答案卷、卡】作答

In the following, $\mathbb{F}$ denotes a field with infinitely many elements.

1. (15%) Express

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

as a product of elementary matrices.

2. (10%) Show that eigenvectors from different eigenspaces of a matrix are linearly independent.

3. Let

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \\ 3 & 9 \end{pmatrix}$$

Let $\beta := \{(1,1),(1,2)\}$ be an ordered basis for $\mathbb{R}^2$ and $\gamma := \{(0,0,1),(0,1,1),(1,1,1)\}$ be an ordered basis for $\mathbb{R}^3$.

(a) (10%) Find a linear transformation $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ such that the matrix representation

$$[T]_\beta^\gamma = A$$

(b) (5%) Find rank(T).

4. (10%) Prove the following theorem: For $A \in M_{n\times n}(\mathbb{F})$, $\mathrm{b} \in \mathbb{F}^n$, if the system $A\mathbb{X} = \mathrm{b}$ has exactly one solution, then A is invertible.

5. (15%) Let $L : P_3(\mathbb{R}) \to P_3(\mathbb{R})$ be given by

$$L[p(t)] = p(t) + p(1)(t-3) - 2p'(1)(2t-1)$$

Find the eigenvalues and corresponding eigenvectors of L where $P_3(\mathbb{R})$ is the vector space of real polynomials of degree ≤ 3.

6. (a) (10%) Show that if $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ is of rank m, there exists $B \in M_{n\times m}(\mathbb{F})$ such that

$$BA = I_n$$

(b) (5%) What is the rank of B?

7. (10%) Give $A \in M_{2\times 2}(\mathbb{Q})$ which is not diagonalizable over $\mathbb{Q}$, but A is diagonalizable over $\mathbb{R}$.

8. (10%) Prove or give a counterexample: any $A \in M_{n\times n}(\mathbb{C})$ is similar to A^t.