

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學暨醫學院
丙組(計算生物與人工智慧組)

科目代碼：0601

考試科目：微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷(卡)上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清(含未依範例畫記)致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 提早交卷者不可攜出試題，請將試題連同答案卷(卡)交予監考人員，攜出將以違規論處。當節考試結束後試題將置於講台，可自行取回，本試場不負保管責任。
7. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學暨醫學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 1 頁 * 請在【答案卷】作答

1. (20%) 求下列極限。

(A) (12%) $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^n \frac{n}{(n+j)^2} \sin\left(2 - \frac{n}{n+j}\right).$

(B) (8%) $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{\frac{1}{x}}.$

2. (10%) 試問下列敘述是否正確？請說明原因。

(A) (5%) 若 $f, g: (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 為可微分函數且 $f'(x) \geq g'(x), \forall x \in (0, 1)$ ，則 $f(x) \geq g(x), \forall x \in (0, 1)$ 。

(B) (5%) 若函數 $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為一對一函數，且 g 於 $x=0$ 不可微分，則其反函數 g^{-1} 於 $g(0)$ 不可微分。

3. (A) (5%) 令函數 $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 為一連續函數，試證明

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^b f(a+b-x) dx.$$

(B) (5%) 利用 (A) 的結果求下列定積分之值

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{\sin x + \cos x} dx.$$

4. (10%) 實驗室有某種細菌，繁殖速度為每 2 天可增長為原本 3 倍之數量。

(A) (5%) 若 2 週後該種細菌數量為 2843.1 萬隻，試問其原本數量為何？

(B) (5%) 試問第 16 天時該種細菌數量為多少？

國立清華大學 115 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學暨醫學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 2 頁 * 請在【答案卷】作答

5. (10%) 求不定積分 $\int \tan^3 x dx$ 。

6. (15%) 判斷下列級數之斂散性：

(A) (8%) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{(1+k^2)^3}$.

(B) (7%) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n^2}$.

7. (10%) 求二變數函數 $f(x, y) = x^3 - 3x + 3xy^2$ 之相對極大值 (Local Maximum)、相對極小值 (Local Minimum) 與鞍點 (Saddle Point)。

8. (10%) 令 $a > 0$ ，計算下列三重積分值：

$$\int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \int_{-\sqrt{a^2-x^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-x^2-y^2}} (x^2z + y^2z + z^3) dz dx dy.$$

9. (5%) 計算下列線積分：

$$\int_C x^2 dx + y^2 dy,$$

其中 C 為位於第一象限連接起點 $(3, 0)$ 、終點 $(0, 3)$ ，半徑為 3 的四分之一圓弧弧線。