

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 114 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學暨醫學院
丙組(計算生物與人工智慧組)

科目代碼：0601

考試科目：微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷(卡)上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清(含未依範例畫記)致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 114 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學暨醫學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 1 頁 * 請在【答案卷】作答

1. (10%) 求下列極限。

(A) (5%) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^{1/5} - 1}{x - 1}.$

(B) (5%) $\lim_{x \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k-1}}{k!}.$

2. (15%) 試問下列敘述是否正確？請說明原因。

(A) (7%) 若 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為一可微分函數且其為奇函數 (odd function)，則其導函數 f' 亦為一奇函數。

(B) (8%) 若函數 $g: (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$ 滿足 $g(x^2)$ 於 $x = 0$ 可微分，則 $g(x)$ 於 $x = 0$ 可微分。

3. (10%) 給定函數 $f(x) = e^x \sin(\frac{\pi}{6}x)$, $x \in \mathbb{R}$.

(A) (5%) 求函數 f 之導函數 $f'(x)$ 。

(B) (5%) 求過曲線 $y = f(x)$ 上一點 $(1, \frac{e}{2})$ 之切線方程式。

4. (10%) 令 $f(x, y, z) = xyz$ 。利用拉格朗日插值法 (Method of Lagrange Multipliers) 求函數 $f(x, y, z)$ 在限制條件 (constraint)：

$$xy + 2xz + 2yz = 12$$

下之最大值。

國立清華大學 114 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學暨醫學院丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 2 頁 * 請在【答案卷】作答

5. (10%) 假設 $g: [\frac{1}{128}, \frac{1}{2}] \rightarrow \mathbb{R}$ 為一連續函數且滿足

$$\int_{\frac{1}{128}}^{\frac{x}{2}} g(t) dt = x \tan x - \frac{1}{8} \tan\left(\frac{1}{8}\right), \quad x \in \left[\frac{1}{8}, \frac{1}{2}\right].$$

試求函數值 $g(\frac{\pi}{2})$ 。

6. (10%) 令 R 為曲線 $y = \sin^2 x$ 與 x -軸在 $[0, \frac{\pi}{6}]$ 區間所圍成之平面區域。求平面區域 R 繞 y -軸旋轉所得之旋轉體的體積。

7. (10%) 求不定積分：

$$\int e^x \left[\ln x + \frac{2}{x^3} \right] dx.$$

(提示：利用分部積分 (integration by parts) 計算 $\int e^x \ln x dx$ 。)

8. (A) (8%) 將 $\frac{1}{3+2x}$ 表達為冪級數 (power series) 表示式，並求其收斂半徑 (radius of convergence)。
(B) (7%) 利用 (A) 之結果，求無窮級數

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{6^k}$$

之和。

9. (10%) 令 R 是 xy -座標平面上四頂點為 $(1,0)$, $(1,1)$, $(2,2)$ 與 $(2,0)$ 之梯形。試計算下列二重積分值：

$$\iint_R y \sin\left(\frac{\pi}{2}x^3\right) dA.$$