

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 111 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院

丙組(計算生物與人工智慧組)

科目代碼：0601

考試科目：微積分

一作答注意事項一

1. 請核對答案卷(卡)上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清(含未依範例畫記)致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 111 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院 丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 1 頁 * 請在【答案卷】作答

1. (10%) 試問下列敘述是否正確？請說明原因。

(A) (5%) 若函數 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 為一遞增函數，則函數 f^2 亦為遞增函數。

(B) (5%) 若函數 $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ 為一對一 (one-to-one) 函數且 $g(a) < g(b)$ ，則其反函數 g^{-1} 為遞增函數。

2. (10%) 令

$$f(x) = \begin{cases} ax + b & , \text{ if } x \in (-1, 0) \\ -\frac{1}{2} + \arcsin x & , \text{ if } x \in [0, 1). \end{cases}$$

試求常數 a 、 b 使得函數 f 為一可微分函數。

3. (10%) 求極限

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{-x+1}.$$

4. (10%) 給定函數

$$f(x) = \int_{-1}^x \frac{t^3}{2 + \sin^4 t} dt, \quad x \in [-1, 2].$$

試問下列敘述是否正確？請說明原因。

(A) (5%) f 在 $[-1, 0]$ 區間是遞減；在 $[0, 2]$ 區間為遞增。

(B) (5%) $f(2)$ 是絕對最大值 (absolute maximum value)。

5. (15%) 計算下列定積分值：

(A) (7%) $\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{6}} \frac{1}{\frac{1}{4} + x^2} dx.$

(B) (8%) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^4 x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx.$

國立清華大學 111 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院 丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 2 頁 * 請在【答案卷】作答

6. (5%) 令 Ω 為兩曲線 $y = \sin x$ 和 $y = \cos x$ 在 $x = 0$ 與 $x = \frac{\pi}{2}$ 之間所圍成之平面區域。試求 Ω 之面積。

7. (10%) 假設數列 $\{x_n\}_n$ 滿足下列遞迴關係式：

$$x_{n+2} = \frac{3}{2}x_{n+1} - \frac{1}{2}x_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad x_1 = \frac{5}{12}, \quad x_2 = \frac{1}{3}.$$

試問數列 $\{x_n\}_n$ 是否收斂？若是，其極限值為何？

8. (10%) 試求出所有正數 p 使得下列級數收斂。

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}.$$

9. (10%) 給定二變數函數

$$f(x, y) = \sin\left(\frac{2\pi e^{x^2}y}{(x^2 + y^2 + 3)^{1/2}}\right).$$

試求其一階偏導數 (partial derivative) $f_x(1, 0)$ 。

10. (10%) 計算下列三重積分值：

$$\int_{-2}^2 \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} \int_{\sqrt{x^2+y^2}}^2 (x^2 + y^2) dz dy dx.$$