

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，
並不得書寫、畫記、作答。

國立清華大學 110 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院

丙組(計算生物與人工智慧組)

科目代碼：0601

考試科目：微積分

—作答注意事項—

1. 請核對答案卷(卡)上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記「由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清(含未依範例畫記)致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 110 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院 丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 1 頁 * 請在【答案卷】作答

1. (10%) 求極限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\left(3 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{4}{n}\right) \cdot \left(3 + \frac{6}{n}\right) \cdots \left(3 + \frac{2n}{n}\right) \right]^{\frac{1}{n}}.$$

2. (10%) 試問下列敘述是否正確？請說明原因。

(A) (5%) 若函數 f 在定義域中的 a 點為連續，則 f 在 a 點可微分。

(B) (5%) 若函數 f 與 g 在某一點 c 為連續，則函數 fg 在 c 點連續。

3. (10%) 計算下列定積分值：

(A) (5%) $\int_0^1 (2x+1) \sin(x^2+x-1) dx.$

(B) (5%) $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \sec^4 \theta \tan^3 \theta d\theta.$

4. (10%) 給定函數 $f(x) = x^3 + x^2$, $x \in [0, 1]$ 且令 $f^{-1} : [0, 2] \rightarrow [0, 1]$ 為 f 的反函數。求下列定積分值：

$$\int_0^2 f^{-1}(y) dy.$$

5. (10%) 令 $a > 0$, $b > 0$ 且 R 為曲線

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

所圍成的橢圓平面區域。求 R 繞著 x -軸旋轉所形成之旋轉體的體積。

國立清華大學 110 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：生命科學院 丙組

考試科目（代碼）：微積分 (0601)

共 2 頁，第 2 頁 * 請在【答案卷】作答

6. (10%) 令 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 為費布那西數列 (Fibonacci Sequence)，亦即 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 滿足下列遞迴關係式：

$$F_{n+2} = F_{n+1} + F_n, \quad n \in \mathbb{N}, \quad F_0 = 1 = F_1.$$

試求下列極限值：

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{F_n}{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n}.$$

7. (10%) 令 $g(x) = xf'(x) + x^2 f''(x)$ ， $|x| < 1$ ，其中

$$f(x) = \frac{1}{1-x}, \quad |x| < 1.$$

(A) (5%) 將 $g(x)$ 表達成冪級數 (power series) 表示式。

(B) (5%) 利用 (A) 求下列無窮級數的和：

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{2^n}.$$

8. (10%) 令 $\vec{a} = (4, 3, -1)$ ， $\vec{b} = (2, -1, 5)$ ， $\vec{c} = (2, -1, 4)$ 與 $\vec{d} = (1, 4, -7)$ 為三維歐氏空間 $\mathbb{R}^3$ 中的向量。

(A) (5%) 試問 $\vec{a}$ ， $\vec{b}$ 兩向量是否垂直？

(B) (5%) 請找出任一向量與 $\vec{c}$ ， $\vec{d}$ 兩向量皆垂直。

9. (10%) 求二變數函數

$$f(x, y) = x^4 + 2y^2 - 4xy + 2$$

的相對極值 (relative extrema)。

10. (10%) 計算下列二重積分值：

$$\iint_R \sqrt{y^2 + 1} dA,$$

其中 R 是曲線 $y = \sqrt[3]{x}$ 與直線 $y = x$ 在第一象限所圍成的平面區域。