

注意：考試開始鈴響前，不得翻閱試題，  
並不得書寫、畫記、作答。


國立清華大學 112 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所  
乙組

科目代碼：5001

考試科目：微積分

### — 作答注意事項 —

1. 請核對答案卷（卡）上之准考證號、科目名稱是否正確。
2. 考試開始後，請於作答前先翻閱整份試題，是否有污損或試題印刷不清，得舉手請監試人員處理，但不得要求解釋題意。
3. 考生限在答案卷上標記  由此開始作答」區內作答，且不可書寫姓名、准考證號或與作答無關之其他文字或符號。
4. 答案卷用盡不得要求加頁。
5. 答案卷可用任何書寫工具作答，惟為方便閱卷辨識，請儘量使用藍色或黑色書寫；答案卡限用 2B 鉛筆畫記；如畫記不清（含未依範例畫記）致光學閱讀機無法辨識答案者，其後果一律由考生自行負責。
6. 其他應考規則、違規處理及扣分方式，請自行詳閱准考證明上「國立清華大學試場規則及違規處理辦法」，無法因本試題封面作答注意事項中未列明而稱未知悉。

國立清華大學 112 學年度碩士班考試入學試題

系所班組別：科技管理研究所(乙組)

考試科目 (代碼)：微積分(5001)

第一題填充部分，請將答案依照題號順序寫在答案卷上，不必寫演算過程。

第二~五題必須詳細寫出計算及證明過程，否則不予計分。

共 1 頁，第 1 頁 \*請在【答案卷】作答

1. Fill in the blank with your answer (7 pts each)

(a) Find  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(\alpha+2x) - 2\sin(\alpha+x) + \sin \alpha}{x^2}$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(b) Find  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n} + \frac{3}{n^2}\right)^n$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(c) Evaluate  $\int_1^{10} \frac{\log_{10} x}{x} dx$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(d) Evaluate  $\int_0^{\pi/2} \int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x} dx dy$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(e) Find the maximum value of the function  $f(x, y) = x^{3/4}y^{1/4}$  subject to the constraint  $x + y = 100$ , where  $x, y > 0$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(f) Find the solution of the initial-value problem:  $\frac{dy}{dx} + 2y = e^{-x}$  and  $y(0) = 0$ . Ans: \_\_\_\_\_.

(g) Calculate the volume of the torus obtained when the circle of radius 1 centered at  $(2, 0)$  is revolved about the  $y$ -axis. Ans: \_\_\_\_\_.

2. (12 pts) Find the absolute maximum and the absolute minimum values of the function

$$f(x) = \frac{x + \cos x}{1 + \sin x}$$

on the interval  $[0, \pi]$ .

3. (12 pts) Assume that the rate of change of the supply of a commodity is proportional to the difference between the demand and the supply so that

$$\frac{dS}{dt} = k(D - S)$$

where  $k$  is a constant of proportionality. Suppose that  $D$  is constant and  $S(0) = S_0$ . Find a formula for  $S(t)$ .

4. (12 pts) Find the critical points of  $f(x, y) = x^3 - 3x^2 + y^2$  and determine whether  $f$  has a local maximum, local minimum, or saddle point at each of these critical points.

5. (15 pts) Let

$$f(x, y) = \begin{cases} y \sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right) & \text{if } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{if } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(a) Do  $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$  and  $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$  exist?

(b) Is  $f$  continuous at  $(0, 0)$ ?