國　立　清　華　大　學　命　題　紙

96 學年度＿統計學研究所＿碩士班入學考試

科目＿統計學＿科目代碼＿0103＿共＿6＿頁第＿1＿頁 *請在【答案卷】內作答

*** 考生請注意：

共有二十五題, 每題均爲四選一之選擇題. 只需將題號與答案(填入括號內)直式寫在答案紙如下(完全不需附上計算過程，因爲過程部份不計分)：

1. (　)

2. (　)

：

：

24. (　)

25. (　)

◎每題四分, 若不會之題目請勿隨意猜測, 回答錯者每題倒扣 1.5 分 .

◎總分數=答對題數×4－答錯題數×1.5, 若總分數爲負, 則以零分計算.

1. 若隨機變數 X 爲一自由度爲 r_1 和 r_2 之 F 分佈, 即 $X \sim F_{r_2}^{r_1}$, 則 $Var(F)$ 爲多少？

(1) $\dfrac{2r_1^2(r_1+r_2-2)}{r_2(r_2-2)^2(r_2-4)}$, $r_2>4$　　(2) $\dfrac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_1-2)^2(r_1-4)}$, $r_1>4$

(3) $\dfrac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_2(r_1-2)^2(r_1-4)}$, $r_1>4$　　(4) $\dfrac{2r_2^2(r_1+r_2-2)}{r_1(r_2-2)^2(r_2-4)}$, $r_2>4$

2. 令 X_1 , X_2 ,和 X_3 爲一組從 $N(1\,,4)$ 所取出之隨機樣本(random sample), 其中 $\mu=1$ 而 $\sigma^2=4$,則

$P_r(X_1+2X_2-2X_3>7)=?$

(1) $1-\Phi(1)$　　(2) $\Phi(1)$　　(3) $2\Phi(1)-1$

(4) $2[1-\Phi(1)]$, 其中 $\Phi(x)=P_r(N(0,1)\le x)$.

3. 假設 $Y_{(1)}<Y_{(2)}<Y_{(3)}<Y_{(4)}$ 表示從機率分布函數(probability density function) $f(y)=2y,\quad 0<y<1$

所取出一組隨機樣本之有序(order)統計量, 則 $P_r(Y_{(3)}>\frac{1}{2})=?$

(1) $\dfrac{13}{256}$　　(2) $\dfrac{233}{256}$　　(3) $\dfrac{21}{25}$　　(4) 以上皆非

4. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 是一組從 $N(u\,,\sigma^2)$ 所取出之隨機樣本. 現定義

$$\overline{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i/n\,,\; S^2=\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2/(n-1) \text{ 和 } k(n)=\sqrt{(n-1)/2}\;\;\Gamma[(n-1)/2]/\Gamma(n/2) ,$$

則參數 x_p，其中 $P_r(X_1 \le x_p) = p$（ p 爲已知)，之 UMVUE (uniformly minimum variance unbiased estimator)爲何？

(1) $S + z_p k(n)\overline{X}$ (2) $S + z_{1-p} k(n)\overline{X}$ (3) $\overline{X} + z_{1-p} k(n)S$

(4) $\overline{X} + z_p k(n)S$， 其中 z_p 滿足 $P_r(N(0,1) \le z_p) = p$，$0 < p < 1$.

5. 令隨機變數 $X \sim b(1, p)$，$p \in \left[\frac{1}{4}, \frac{3}{4}\right]$，則 p 之 MLE (maximum likelihood estimator)爲何？

(1) $\frac{X+2}{4}$ (2) $\frac{2X+1}{4}$ (3) $\frac{3X+1}{4}$ (4) $\frac{3-2X}{4}$

6. 若 $X_1 \sim \chi^2_{r_1}$，$X_2 \sim \chi^2_{r_2}$，$X_3 \sim \chi^2_{r_3}$ 且 X_1，X_2 和 X_3 相互獨立，則隨機變數 $Y_1 = X_1 + X_2$ 和 $Y_2 = X_1 / X_2$ 之關係爲

(1)互相獨立 (2)不相關但非獨立 (3)相關亦非獨立 (4)不相關但獨立

7. 假設 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 爲一組從累積分佈函數(cumulative distribution function) $F(x)$ 所取出之隨機樣本. 現欲檢定 $H_0 : F(72) = \frac{1}{2}$ 對 $H_1 : F(72) > \frac{1}{2}$，若令 Y 爲隨機樣本 $X_1, X_2, \cdots, X_{10}$ 中小於或等於 72 之個數且棄却域(critical region)爲 $\{y : y \ge 8\}$，其中 y 爲隨機變數 Y 之觀測值，則此檢定顯著水準(significance level)爲

(1) $\frac{5}{128}$ (2) $\frac{6}{128}$ (3) $\frac{7}{128}$ (4) $\frac{8}{128}$

8. 將一個骰子丟擲 120 次所得各點之頻率如下：

	1	2	3	4	5	6
頻率	20	30	20	25	15	10

現欲利用一卡方(chi-square)檢定來檢驗骰子的均勻性，假若顯著水準爲 0.05，則下列何者爲真？(提示： $P_r(\chi^2_5 > 11.07) = 0.05 = P_r(\chi^2_6 > 12.6)$)

(1) 這是一個均勻的骰子 (2) 這不是一個均勻的骰子

(3) 若這個檢定之檢定統計量爲 Y 則棄却域爲 $\{y : y > 12.6\}$，其中 y 爲 Y 之觀測值

(4) 以上皆非

9. 假設我們有一簡單線性迴歸(simple linear regression)模式 $Y_i = \alpha + \beta x_i + \varepsilon_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$, 其中 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 爲已知常數而 ε_i 爲 iid $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 分布. 若 $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 分別代表參數 α 和 β 的最小平方估計量(least squares estimator), 則下列何者不正確.

(1) 殘差(residual) $e_i = Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i$, $i = 1, 2, \cdots, n$ 與 $(\hat{\alpha}, \hat{\beta})$ 相互獨立

(2) $\hat{\beta} = \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y}) x_i / \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) x_i$, 其中 $\overline{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i / n$ 和 $\overline{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i / n$

(3) $\hat{\alpha}$ 和 $\hat{\beta}$ 相互獨立 (4) $\hat{\alpha} = \overline{Y} - \hat{\beta}\overline{x}$

10. 承第 9 題, 則這個迴歸模式之決定係數(coefficient of determination)爲

(1) $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2 / \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$ (2) $\sum_{i=1}^{n} (\overline{Y} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2 / \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \overline{Y})^2$

(3) $\sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2 / \sum_{i=1}^{n} (\overline{Y} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2$ (4) $\sum_{i=1}^{n} (\overline{Y} - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2 / \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \hat{\alpha} - \hat{\beta} x_i)^2$

11. 設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ $(n > 2)$ 代表從某一分配所抽出之隨機樣本, 該分配之機率密度函數爲 $f(x;\theta) = \theta x^{\theta-1}$, $0 < x < 1$, 其中 θ 爲參數, 則 Rao-Cramer lower bound 爲何？

(1) θ^2 (2) $\dfrac{\theta^2}{n}$ (3) $\dfrac{\theta}{n}$ (4) $\dfrac{\theta^2}{n-1}$

12. 設隨機變數 Z_n 服從 Poisson(n), 其中 $E(Z_n) = n$ 代表此分配之參數. 若 Z_∞ 代表 $(Z_n - n)/n$ 之極限分布(limiting distribution), 則 Z_∞ 滿足

(1) $P_r(Z_\infty < 0) = \frac{1}{2}$ (2) $P_r(Z_\infty < -c) = P_r(Z_\infty > c)$, 其中 c 爲任一常數

(3) $P_r(Z_\infty = 0) = 1$ (4) 以上皆非

13. 若 $X_{(1)} < X_{(2)} < \cdots < X_{(n)}$ 代表從機率密度函數 $f(x;\theta) = 1$, 其中 $-\frac{1}{2} \le x - \theta \le \frac{1}{2}$ 且 $-\infty < \theta < \infty$ 代表此分配之參數, 則 θ 之最大概似估計量爲

(1) $X_{(n)} + \frac{1}{2}$ (2) $X_{(1)} - \frac{1}{2}$ (3) $(2X_{(1)} + 4X_{(n)} - 1)/6$ (4) 以上皆非

14. 承第 5 題定義對數機率比（odds ratio） $\rho = \log \dfrac{p}{1-p}$ ，則 ρ 之 MLE 爲何？

(1) $\log \dfrac{3X+1}{3-3X}$ (2) $\log \dfrac{3-3X}{3X+1}$ (3) $\log \dfrac{2X+1}{3-2X}$ (4) 以上皆非

15. 若隨機變數 X_1 具有機率密度函數 $f(x_1)=3x_1^2$, $0<x_1<1$ 且 $E(X_2|X_1)=\frac{2}{3}X_1$, 則隨機變數 X_2 之期望值爲多少？

(1) $\frac{1}{3}$ (2) $\frac{1}{2}$ (3) $\frac{2}{3}$ (4) 以上皆非

16. 令 $X \sim b(n, p)$ 且損失(loss)函數 $L(p, \delta(x))=[p-\delta(x)]^2$. 若 $\pi(p)=1, 0<p<1$, 是參數 p 之一先驗(prior)機率密度函數, 則 p 之貝氏（Bayes）估計量爲

(1) $\frac{X+1}{n+2}$ (2) $\frac{n-X+1}{n+2}$ (3) $\frac{n+2}{X+1}$ (4) $\frac{n+2}{n-X+1}$

17. 承第 16 題, 貝氏估計量之貝氏風險(risk)爲

(1) $\frac{2}{3(n+2)}$ (2) $\frac{1}{2(n+2)}$ (3) $\frac{1}{6(n+2)}$ (4) 以上皆非

18. 設 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 代表一組從 $N(u, \sigma^2)$ 所取出之隨機樣本, 其中 $-\infty<\mu<\infty$ 且 $\sigma^2>0$ 均爲未知參數. 現依據樞紐量(pivot) $\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/\sigma^2$ ，其中 $\bar{X}=\sum_{i=1}^{n}X_i/n$, 找出 σ^2 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間之機率爲 $P_r(a<\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2/\sigma^2<b)=1-\alpha$, 則此信賴區間有最短長度之條件爲

(1) $f_{n-1}(a)=f_{n-1}(b)$ (2) $af_{n-1}(a)=bf_{n-1}(b)$

(3) $bf_{n-1}(a)=af_{n-1}(b)$ (4) $a^2f_{n-1}(a)=b^2f_{n-1}(b)$,

其中 $f_{n-1}(y)$ 代表自由度爲 $n-1$ 卡方分配之機率密度函數.

19. 假設隨機變數 X 之機率密度函數可能爲 $f_0(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-x^2}{2}}$, $-\infty<x<\infty$ 或 $f_1(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$, $-\infty<x<\infty$. 今欲檢定 $H_0: f(x)=f_0(x)$ 對 $H_1: f(x)=f_1(x)$, 其中 $f(x)$ 代表 X 之機率密度函數, 則顯著水準爲 α 之最有效力(most powerful)檢定之棄却域爲

(1) $|X|<z_{\alpha/2}$ (2) $|X|>z_{\alpha/2}$ (3) $0<X^2<z_{\alpha/2}$ (4) $X^2>z_{\alpha/2}$,

其中 $z_{\alpha/2}$ 滿足 $P_r(N(0,1)>z_{\alpha/2})=\alpha/2$.

20. 若 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 代表一組從 $N(u, \sigma^2)$ 所取出之隨機樣本, 其中 $-\infty < \mu < \infty$ 和 $\sigma^2 > \infty$ 均爲未知參數. 現利用統計量 $S^2 = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2 / c$ 來估計 σ^2, 其中 c 爲一常數, 當 S^2 有最小均方差(mean square error)時, c 爲

(1) $n+1$ (2) n (3) $n-1$ (4) 以上皆非

21. 下列各敍述何者不正確?

(1) 參數之 MLE 若存在, 則不一定唯一.

(2) 參數之 UMVUE 若存在, 則一定唯一.

(3) 在一檢定問題中假設樣本數爲固定, 對任一檢定若減少型一誤差(Type I error)之機率, 則必增加型二誤差之機率, 反之亦然.

(4) 對任何一組隨機樣本, 參數之充份(sufficient)統計量不一定存在.

22. 若 $E(X^2) < \infty$, 則下列何者正確

(1) $Var(Y) = Var(E(Y|X)) + E(Var(Y|X))$ (2) $Var(X) = Var(E(X|Y)) + E(Var(X|Y))$

(3) $Var(E(X|Y)) = Var(X) + E(Var(X|Y))$ (4) $Var(E(Y|X)) = Var(Y) + E(Var(Y|X))$

23. 承第 9 題, 則參數 $E(Y|x_0)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 信賴區間爲

(1) $\hat{Y} \pm z_{\alpha/2} s_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}}$ (2) $\hat{Y} \pm t_{n-2,\alpha/2} s_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}}$

(3) $\hat{Y} \pm t_{n-2,\alpha/2} s_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}}$ (4) $\hat{Y} \pm z_{\alpha/2} s_\varepsilon \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}}$,

其中 $P_r(N(0,1) > z_{\alpha/2}) = \alpha/2 = P_r(\chi^2_{n-2} > \chi^2_{n-2,\alpha/2})$, $s_\varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{n} e_i^2 / (n-2)$, $s_x^2 = \sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2 / (n-1)$ 和 $\hat{Y} = \hat{\alpha} + \hat{\beta}x_0$

24. 承第 9 題, 隨機觀測量 $Y_0 = \alpha + \beta x_0 + \varepsilon_0$, 其中 x_0 爲已知常數而 $\varepsilon_0 \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 之 $100(1-\alpha)\%$ 預測區間爲

(1) $\hat{Y} \pm z_{\alpha/2} s_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}}$ (2) $\hat{Y} \pm t_{n-2,\alpha/2} s_\varepsilon \sqrt{1 + \frac{1}{n} + \frac{(x_0 - \bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}}$

(3) $\hat{Y} \pm t_{n-2,\alpha/2} s_{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}}$ (4) $\hat{Y} \pm z_{\alpha/2} s_{\varepsilon}\sqrt{\frac{1}{n}+\frac{(x_0-\bar{x})^2}{(n-1)s_x^2}}$

25. 本所碩士班入學考試要求每科出題人員盡量使分數合於常態分布，希望平均值爲 50 分左右，標準差約爲 15 分，則 100 個考生中大約有多少人可以超過 80 分？

(1) 5 人 (2) 4 人 (3) 3 人 (4) 2 人

(提示：$P_r(0 < N(0,1) < 2) = 0.4772$)