國　立　清　華　大　學　命　題　紙

96 學年度＿統計學研究所＿碩士班入學考試

科目 基礎數學 科目代碼 0101 共 2 頁第 1 頁 *請在【答案卷】內作答

第一部份，填充題，共 13 題，每題 4 分，共 52 分。

答案卷第一頁留給填充題，照題號直向順序做答。不要計算過程。

1. 下列級數 a~d 中，收斂的級數是 = ＿(1)＿。(列舉收斂級數之題號)

   a. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n^p \ln n},\ p>1$

   b. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n(\ln n)^p},\ p>1$

   c. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n^p},\ p>1$

   d. $\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\ln n}{n+n^p},\ 0<p<1$

2. 設 $f(x,y)=\tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$，則 $x\frac{\partial f}{\partial y}+y\frac{\partial f}{\partial x}$ = ＿(2)＿。

3. $\int\frac{3x^2-7x+5}{(x-1)(x^2-2x+2)}dx$ = ＿(3)＿。

4. $\int_0^1 \sqrt[3]{e^{x/2}-1}\,dx$ = ＿(4)＿。

5. $\int_0^1\int_{y^3}^1 y^2 e^{x^2}\,dxdy$ = ＿(5)＿。

6. 設 $f(x)=\int_{x/3}^{x/2}e^{t^2}dt$，則 $\lim_{h\to 0}\frac{f(h)}{h}$ = ＿(6)＿。

7. 下列敘述 a~d 中，正確的敘述的是 = ＿(7)＿。(列舉正確敘述之題號)

   a. $trace(\mathbf{AB})=trace(\mathbf{BA})$，其中 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 分別是 $m\times n,\ n\times m$ 實數矩陣。

   b. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})^2=\mathbf{A}^2+2\mathbf{AB}+\mathbf{B}^2$，其中 $\mathbf{A}$，$\mathbf{B}$ 是 $n\times n$ 實方陣。

   c. 若 $\mathbf{A}^2=\mathbf{A}$，則 $\mathbf{A}$ 的 eigen-values 必為 1，其中 $\mathbf{A}$ 是 $n\times n$ 實方陣。

   d. 若 $\mathbf{A}$ 的行向量是線性獨立，則 $\mathbf{A}$ 的列向量也是線性獨立。

8. 設 $\mathbf{A}$ 是 $n\times n$ 可逆矩陣，$\mathbf{a}$ 是常數向量，都是實數。則 $\max_{\mathbf{x}\neq 0}\frac{(\mathbf{x}^T\mathbf{a})^2}{\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}}$ = ＿(8)＿，其中上標 T 表示轉置(transpose)。

9. 設 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 3\\ 1 & 4\end{pmatrix}$，則 $\mathbf{A}^{50}-2\mathbf{A}^{48}+\mathbf{A}$ = ＿(9)＿。

10. 設 $A=\begin{bmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\1 & 1 & 0 & 1\\1 & 0 & 1 & 1\\0 & 1 & 1 & 1\end{bmatrix}$，$p(\lambda)$ 是 A 的 characteristic polynomial, 且其最高次係數等於 1。則 $p(1)$ = ___(10)___。

11. (續上題)若 $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \lambda_3 \le \lambda_4$ 是 A 的 eigen-values，則 $\lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 + 4\lambda_4$ = ___(11)___。

12. (續上題) 常微分方程式 $\mathbf{y} = A\mathbf{x}$ 的一般解是 = ___(12)___，其中 $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$，$\mathbf{x}' = (x_1', x_2', x_3', x_4')^T$，後者表示前者的微分。

13. 解 x, y, z 的聯立方程式 $\begin{cases} x + y + kz = 1 \\ x + ky + z = 1 \\ kx + y + z = 1 \end{cases}$ 時，若當 $k = k_0$ 時無解，當 $k = k_\infty$ 時有無窮多解。則 $k_0 + k_\infty$ = ___(13)___。

第二部份：證明題，共 6 題，每題 8 分，共 48 分。

本部份自答案卷第二頁開始做答，**第一頁留給填充題**。

14. 試求 $\lim_{p\to\infty} \sqrt[p]{1^p + 2^p + \cdots n^p}$。(寫出詳細步驟。)

15. 設 $\lim_{n\to\infty} a_n = a$，其中 a, a_n 都是實數，令 $S_n = a_1 + \cdots a_n$。試用 $\varepsilon - \delta$ 方法證明 $\lim_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = a$。

16. 試證 [0,1] 區間的實數不可數。

17. 設 $\mathbf{A}_{n\times n}$ 是實對稱方陣。試證 $\mathbf{A}$ 是正定矩陣(positive definite)，若且唯若 $\mathbf{A}$ 的 eigen-values 都是正數。

18. 設 $\mathbf{A}$ 是 $n \times n$ 正定矩陣(positive definite)，最大特徵值是 λ_1，$\mathbf{x}$ 是 n 維向量。試證 $\max_{\mathbf{x}\neq 0} \frac{\mathbf{x}'\mathbf{A}\mathbf{x}}{\mathbf{x}'\mathbf{x}} = \lambda_1$。

19. 設 $X_{n\times m}$ 是滿秩(full rank)，$m < n$，設 V 是 X 的行向量所張出的空間。則 R^n 對子空間 V 的投影是 $X(X^T X)^{-1} X^T$，其中上標 T 表示轉置(transpose)。