國 立 清 華 大 學 命 題 紙

95 學年度＿統 計＿所碩士班入學考試

科目＿統 計 學＿ 科目代碼＿0303＿共＿3＿頁第＿1＿頁 *請在【答案卷】內作答

一、選擇題（複選，每題 4 分, 7 題共 28 分）

1. $(X_1,\cdots,X_n)$ 是從下列分配抽出的 n 個隨機樣本，

$$f(x|\mu;\sigma)=\frac{1}{2\sqrt{3}\sigma},\quad \mu-\sqrt{3}\sigma<x<\mu+\sqrt{3}\sigma$$

令 $\hat{\mu}$ 及 $\hat{\sigma}$ 分別為 μ 及 σ 的 MLE，且 $(X_{(1)},\cdots,X_{(n)})$ 為 $(X_1,\cdots,X_n)$ 之順序統計量，試問下列敍述何者為真：

(a) $\hat{\mu}=\dfrac{X_{(1)}+X_{(n)}}{2}$ (b) $\hat{\sigma}=\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{2\sqrt{3}}$

(c) $\hat{\mu}=\dfrac{X_{(n)}-X_{(1)}}{2}$ (d) $\hat{\sigma}=\dfrac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2\sqrt{3}}$

(e) $\hat{\mu}+\sqrt{3}\hat{\sigma}=X_{(n)}$

2. 欲估計銅板出現正面之機率 p，今隨機擲銅板 18 次共出現 10 次正面， 若假設 p 之事前分配（prior distribution）為 $U(0, 1)$， 試問 p 的 posterior Bayes 估計值為

(a) 0.45 (b) 0.50 (c) 0.55 (d) 0.60 (e) 0.65

3. 令 X_1, X_2 為從 $f(x|\theta)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}},\ x>0$ 抽出之隨機樣本，欲檢定 $H_0:\theta=2$ vs $H_1:\theta>2$，假設某檢定法則之 critical region 為 $(X_1+X_2)\ge 8$ ，試問此檢定法則在 $\theta=4$ 之效力函數（power function）為

(a) e^{-1} (b) $2e^{-1}$ (c) $3e^{-2}$ (d) $4e^{-2}$ (e) $4e^{-3}$

4. 令 $(X_1,\cdots,X_n)$ 為 $N(\mu;1)$ 抽出的 n 個樣本， 若採用檢定法則: Reject H_0 iff $\overline{X}_n\ge c$ 來處理檢定問題 $H_0:\mu=0$ vs $H_1:\mu=1$， 在要求此法則之 $\alpha\le 0.05$ 及 $\beta\le 0.10$ 限制下（已知 $z_{0.05}=1.645$ 且 $z_{0.10}=1.282$）， 試問下列何者敍述最正確？

(a) $n=9,\quad c=0.65$ (b) $n=18,\quad c=0.65$

(c) $n=9,\quad c=0.56$ (d $n=18,\quad c=0.56$

(e) $n=14,\quad c=0.60$

國 立 清 華 大 學 命 題 紙

95學年度 統 計 所碩士班入學考試

5. 令$X \sim N(0;\sigma^2)$， $\sigma>0$， 已知 $P(X \le \sigma) \approx 0.84$；

   試問隨機區間 $[|X|, |10X|]$ 包含σ之最近似機率值為

   (a) 0.50 (b) 0.60 (c) 0.70 (d) 0.80 (e) 0.85

6. 前述問題中， 試問此隨機區間之長度為σ的幾倍？

   (a) $\frac{6}{\sqrt{2\pi}}$ (b) $\frac{12}{\sqrt{2\pi}}$ (c) $\frac{18}{\sqrt{2\pi}}$ (d) $\frac{24}{\sqrt{2\pi}}$ (e) $\frac{30}{\sqrt{2\pi}}$

7. 若$(X_1,\cdots,X_n)$ 是從$N(\mu, \sigma^2)$抽出的n個隨機樣本。 令$S^2=\dfrac{\sum(X_i-\bar{X})^2}{n-1}$，

   試問下列有關S^2及S之敘述何者為真？

   (a) $E(S)=\sigma$ 及 $E(S^2)=\sigma^2$

   (b) $E(S)=\sigma$ 及 $E(S^2)\neq\sigma^2$

   (c) $E(S)\neq\sigma$ 及 $E(S^2)=\sigma^2$

   (d) $E(S)\neq\sigma$ 及 $E(S^2)\neq\sigma^2$

   (e) $E(S^{-2})\neq\sigma^{-2}$

二、計算題（共3題, 計72分）

1. 假設清大光復路口在t小時內發生車禍之總次數服從 Poisson 分配$P(\lambda t)$， 令θ為此路口第一次車禍發生之時間超過2小時的機率值， 試回答下列問題：

   (a) 試將未知參數θ表示為λ的函數. (5分)

   (b) 以1小時為區間單位,在過去24小時內， 此路口單位時間內發生車禍之次數分別以$X_1, X_2, \cdots, X_{24}$ 表示之， 試分別求θ之不偏估計量及UMVUE. (8分)

   (c) 試分別求λ及θ之MLE. (4分)

   (d) 在 (b) 及 (c) 中，何者為θ之較合理估計量? 理由為何？ (4分)

   (e) 以(b)之結果， 試求λ之95%的近似信賴區間. (4分)

2. 下列為2個自變數 (x_1, x_2) 及一個應變數 (Y) 之電腦報表:

變數	樣本數	Mean	St. Dev
x_1	25	8.76	6.88
x_2	25	409.3	325.2
Y	25	22.38	15.52

Correlation Matrix

	x_1	x_2	Y
x_1	1		
x_2	0.824	1	
Y	0.965	0.892	1

(a) 試詳述如何利用這些數據，來獲得下列 LSE 迴歸方程式: (15 分)

亦即 $\hat{Y} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \hat{\beta}_2 x_2$; 其中 $\hat{\beta}_0 =$ _____; $\hat{\beta}_1 =$ ______; $\hat{\beta}_2 =$ ______

(Hint: 由 LSE 的 normal equation 求解之)

(b) 試詳述如何利用這些數據來計算 R^2 (coefficient of multiple determination) (10 分)

3. 假設 $(U_1, \cdots, U_{10})$ 是從 $U(0, 1)$ 抽出的10個隨機樣本，令 R 為此10個樣本之全距值 (range)，

(a) 試求 R 之抽樣分配 (8 分)

(b) 試分別求 R 的 mean, median 及 mode (10 分)

(c) 試將 (b) 中之 mean, median 及 mode 依其大小值排序 (4 分)