國 立 清 華 大 學 命 題 紙

95學年度＿統 計 所＿碩士班入學考試

科目＿機 率 論＿ 科目代碼＿0302＿共＿2＿頁第＿1＿頁 *請在【答案卷卡】內作答

一・ 填充題(15題，一題一格，每格5分)

注意：務必將填充題答案寫在答案卷第一頁，而且不包括計算過程。

1. 一甕中有9黑1白共10個相同球(除了顏色)，不放回隨機抽樣3個，則抽到白球的機率=＿＿＿＿＿。

2. 一甕中有w個白球b個黑球，一次隨機取一個不放回直到白球出現爲止。則抽出的黑球數目的期望值=＿＿＿＿＿。

3. A, B, C三人依此序輪流丟二個骰子，先丟出7點者贏。則C贏的機率=＿＿＿＿＿。

4. 設Z是標準常態分布，Φ是其累積機率函數，則$E(\Phi(Z))$=＿＿＿＿＿。

5. 設Z_1, Z_2是獨立標準常態分布，$\mathbf{Y}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}Z_2\\ Z_2\end{pmatrix}$。則$\operatorname{cov}(\mathbf{Y})$的二個固有值(eighenvalue)的和=＿＿＿＿＿。

6. 設X, Y, Z是連續型$i.i.d.$均勻(0,1)分布。則$\Pr(X \ge 3YZ)$=＿＿＿＿＿。

7. 設某人左右口袋各有口香糖一盒，開始各有20粒口香糖。他每次吃一粒口香糖，隨機選自左右口袋。數次之後，當他發現取出的口香糖盒當中已經沒有口香糖，則另外一盒口香糖盒中還有10粒口香糖的機率=＿＿＿＿＿。

8. 設人口中犯某疾病的比率是0.1%，某檢驗法檢驗該病的正確率是99.9%，不管是不是有該病。現在某人使用該檢驗法結果是正(顯示有病)，則他真正有病的機率=＿＿＿＿＿。

9. 網路商店一賣家約好一買家於中午12:30～1:00在火車站見面交貨付款。假設二人皆是在該段時間中(均勻)隨機到達，而且買家、賣家到達後各自只等10分鐘。則二人見面的機率是＿＿＿＿＿。

10. 設隨機變數X具備$\Pr(X=1)=p$，$\Pr(X=-1)=1-p$。若實數c滿足$E(c^X)=2$，則c=＿＿＿＿＿。

國 立 清 華 大 學 命 題 紙

95 學年度＿＿統 計 所＿＿碩士班入學考試

科目＿機 率 論＿ 科目代碼＿0302＿共＿2＿頁第＿2＿頁 *請在【答案卷卡】內作答

11. 從線長 L 的線段隨機取一點，則 $\Pr(\text{長線段長} > 4\text{短線段長})=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

12. A, B 二人丟銅板對局，正面 A 贏，反面 B 贏，輸家付對方 1 元，直到一方完全贏得所有錢。若開始 A 有 a 元，B 有 b 元，而且銅板出現正面的機率是 $p, p \neq \frac{1}{2}$，則 A 贏得所有錢的機率 =＿＿＿＿＿＿＿＿。

13. 設隨機變數 X, Y 的聯合機率分布是

$$f(x,y) = \begin{cases} c & 0 < x < y < 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

則 $\Pr\left(0 < X < \frac{1}{2} \middle| Y = \frac{3}{4}\right)=$＿＿＿＿＿＿＿＿。(答案不應該有 c)

14. 設某實驗可以有 3 種結果，機率分別是 p_1, p_2, p_3，皆非 0。獨立重複此實驗 n 次，設 X 是第一種結果的次數，Y 是第二種結果的次數。若 ρ 是 X 和 Y 的 correlation coefficient，則 $\rho=$＿＿＿＿＿＿＿＿。

15. 隨機選出的 100 人當中，已知沒有人的生日是 2 月 29 日。則此 100 人中相異生日的數目的期望值=＿＿＿＿＿＿＿＿。(盡量化簡，但不用算出一個數字)

二．計算證明題(二題，第一題 10 分，第二題 5 分＋10 分)

注意：計算證明題自答案卷第二頁寫起，第一頁保留給填充題

1. 設 X_1, X_2, X_3 是 iid exp(1)分布。試求 $Y = \dfrac{X_1}{X_1 + X_2 + X_3}$ 的機率密度函數。

2. (a)設隨機變數 X 的 support 包含在開區間 I 中，ϕ 是 I 上的 convex 函數，而且 $E(X)$ 存在。請證明 $\phi(E(X)) \le E(\phi(X))$。(不妨假設 ϕ 是 2 次可微分)

(b)設 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 是正數，請使用(a)證明 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 的

算術平均 ≥ 幾何平均 ≥ 調和平均