國 立 清 華 大 學 命 題 紙

九十一學年度 統計學研究所 系（所） 組碩士班研究生招生考試

科目 機率論 科號 0302 共 5 頁第 1 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

本試題共九題填充題，只須將最後答案清楚填入【答案卷】中 （如下例）

（勿將詳細導證列出，否則可能導致答案無法清楚辨認，而不予計分）

請清楚標明填充之號碼如下例

（1a） ……（答案）

（1b） ……（答案）

（2） …… （答案）

（3） …… （答案）

（4） …… （答案）

.

.

.

（9a） …… （答案）

（9b） …… （答案）

（9c） …… （答案）

1. 考慮下列四個敘述 (其中 X, Y, Z 爲隨機變數；A, B, D, E 爲機率事件)

(A) 若 $P(X>Y)>1/2$，且 $P(Y>Z)>1/2$，則 $P(X>Z)>1/2$ 。

(B) 若隨機變數 X 與 Y 爲正相關，且 Y 與 Z 爲正相關，則 X 與 Z 也必爲正相關。

(C) 若 $P(D|A\cap E)\ge P(D|B\cap E)$，且 $P(D|A\cap E^c)\ge P(D|B\cap E^c)$，則 $P(D|A)\ge P(D|B)$，其中 E^c 爲 E 之餘集合，即 $E\cup E^c$ = 樣本空間，且 E 和 E^c 無交集。

(D) 若 $f(X)$ 與 $g(X)$ 均爲一隨機變數 X 之遞增 (increasing) 函數，$f(X)$ 與 $g(X)$ 若其相關存在，則其相關必不爲負相關。

以上四個敘述中，哪些爲真？ **(填充 1a)(5 分)**。(只須填 A, B,C 或 D 即可)

(此小題必須完全正確才有分數；不作答沒有分數；答錯倒扣 2 分)

哪些不真？ **(填充 1b)(5 分)**。 (只須填 A, B,C 或 D 即可)

(此小題必須完全正確才有分數；不作答沒有分數；答錯倒扣 2 分)

2. 在一項針對學生是否曾順手牽『帽』拿過別人機車安全帽的調查中，訪問者準備一個盒子，盒子中有 4 張卡片上面的敘述爲「你曾拿別人的安全帽」，受訪者回答「是」代表有拿過，回答「否」代表沒有拿過。盒子中另有 6 張卡片上面的問題爲「你不曾拿過別人的安全帽」，受訪者回答「是」代表沒有拿過，回答「否」代表有拿過。訪問者對受訪學生訪問時，請他在盒中任抽一張卡片，回答卡片上的問題，被訪問者只將「是」或「否」告知訪問者即可（也就是說，訪問者不知受訪者是回答哪一個敘述）。現本校 100 位受訪者中，其中有 55 個回答 "是"，45 人

回答 "否"，則本校學生中曾順手牽帽拿過別人機車安全帽之比例估計大約爲 （塡充 2）（10 分）。

3. 自線段 (-1, +1) 中獨立任取二數 a 與 b，則方程式 $x^2+2ax+b=0$ 的兩根均爲實數根的機率爲 （塡充 3）（10 分）。

4. 假若有一個隨機變數 X 其特徵函數（characteristic function）爲 $\phi_X(t)=(2e^{-it}-1)^{-1}$ 則此隨機變數之機率密度函數 (p.d.f)爲 （塡充 4）（10 分）。

5. 某晚某市發生計程車夜黑風高時肇事逃逸事件。市內有兩家計程車，第一家（其車全爲黃色）佔 90%，第二家（其車全爲紅色）佔 10%。當晚目擊證人指認肇事車輛爲紅色，但目擊證人的可信度測試結果爲：相同的夜色環境下，肇事者若爲紅色計程車，證人清楚辨識正確顏色的機會爲 80%；若肇事者爲黃色計程車，證人辨識正確顏色的機會也爲 80%。現目擊證人指證爲紅色情況下，你認爲真正肇事者爲紅色的機會大約爲 （塡充 5）（10 分）（四捨五入到小數二位）。

國 立 清 華 大 學 命 題 紙

6. 若隨機變數(X,Y) 具有密度函數 $f(x,y)=1,\ 0<y<2x,\ 0<x<1$ 則條件密度

函數 $f(y|x)$ = （填充 6a）（3 分）；

條件期望值 $E(Y|x)$ = （填充 6b）（3 分）；

X 與 Y 之相關係數為 （填充 6c）（4 分）。

7. （a）本校 5000 名學生中，約有男生 4000 人，女生 1000 人，若歸還取樣任取

100 名學生，利用中央極限定理，男生之數目在樣本中所佔的比例在

區間 [75%，85%] 中之機率大約為標準常態曲線下 （填充 7a）（2.5 分）

到 （填充 7b）（2.5 分） 之積分。（不必考慮連續修正）

(b) 若為任取 400 名學生則此 400 名學生中男生數目所佔的比例在

[75%，85%] 中之機率大約標準常態曲線下 （填充 7c）（2.5 分） 到

（填充 7d）（2.5 分） 之積分。（不必考慮連續修正）

8. 若 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為自均勻(uniform)分佈 U[0,1] 取出之一樣本，令 $\overline{X_n}=\sum_{i=1}^{n} X_i / n$

(a) $\overline{X_n} \xrightarrow{P} c$，求此 c 值，c = （填充 8a）（5 分），其中 $\xrightarrow{P}$ 代表機率收斂。

國 立 清 華 大 學 命 題 紙

九十一學年度 統計學研究所 （所） 組碩士班研究生招生考試

科目 機率論 科號 0302 共 5 頁第 5 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

(b) 利用中央極限定理

$$\frac{2\sum_{i=1}^{n} X_i - n}{\sqrt{n}} \to N(0,d)$$，求此 d 值， d = （填充 8b）（5 分）。

(c) 若 $Y_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$

則 $Y_n \xrightarrow{p} k$ ，求此 k 值，k = （填充 8c）（5 分）。

9. (a) 假設有 K 種不同事件，每一個事件其在 $[0,T]$ 之間發生爲一卜瓦松 (Poisson) 過程，具有單位時間發生次數之期望值爲 λ_i，$i=1,2,\ldots,K$, 且 K 種事件發生相互獨立，現想知在此 K 種不同事件中會有多少在 $[0,T_1]$ 不發生，而在 $(T_1,T]$ 至少發生一次，$0<T_1<T$，令此數目爲 X，則 X 之期望值爲 （填充 9a）（5 分）。

(b) 針對(a)中第一種事件（其單位時間發生次數之期望值爲 λ_1），假若 λ_1 爲任自一伽瑪分佈（具密度函數 $f(\lambda)=\frac{\beta^{-\alpha}}{\Gamma(\alpha)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\lambda/\beta}, \alpha>0, \beta>0, \lambda>0$ ）中取出，則此第一種事件在 $[0,T]$ 之間恰發生一次之機會爲 （填充 9b）（5 分）。

(c) 在 (b) 中考慮 $\alpha \to 0$，若已知此第一種事件在 $[0,T]$ 之間發生，則其在 $[0,T]$ 之間恰發生一次之機會的極限值 （當 $\alpha \to 0$ ）爲 （填充 9c）（5 分）。