國　立　清　華　大　學　命　題　紙

九十一學年度　統計學研究所　系（所）＿＿＿組碩士班研究生招生考試

科目　基礎數學　科號　0301　共　2　頁第　1　頁　*請在試卷【答案卷】內作答

一、填充 (每題8分，共7題56分)

1. 矩陣 $\begin{pmatrix} 1 & 6 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 1 & 8 & 9 \\ 4 & 13 & 10 \end{pmatrix}$ 的 秩(rank) = ＿＿＿＿＿＿＿＿。

2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 4 & -4 & 5 \end{pmatrix}$，設 A 的最大 eigen-value 是 λ，對應的 eigen-vector 之一是 $\mathbf{x} = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)^t$

(上標 t 表示轉置)，而且 $x_1 = -1$，則 $\lambda + x_1 + x_2 + x_3 =$ ＿＿＿＿＿＿。

3. $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\int_0^2 (3x^2+1)(3+x^2)^n dx} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

4. $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\left\{\sqrt{n^2-1}+\sqrt{n^2-2^2}+\cdots+\sqrt{n^2-(n-1)^2}\right\} =$ ＿＿＿＿＿＿＿＿。

5. 微分方程式 $x - y^2 + 2xy\frac{dy}{dx} = 0$ 的解是 ＿＿＿＿＿＿＿＿。

6. $a,b>0$，$0 \le x \le a$，$0 \le y \le b$，則 曲線 $\sqrt{\frac{x}{a}}+\sqrt{\frac{y}{b}}=1$ 與二座標軸所圍的面積 =

＿＿＿＿＿＿＿＿。

7. 設函數 $F(z) = (1-qz)(1-q^2z)(1-q^3z)\cdots$，$|q|<1$，將 $F(z)$ 展開成

$F(z) = A_0 + A_1z + A_2z^2 + \cdots$， 則 $A_n =$ ＿＿＿＿＿＿。(注意 $F(z)$ 是無窮項。)

國 立 清 華 大 學 命 題 紙

九十一學年度 統計學研究所 系（所） 組碩士班研究生招生考試

科目 基礎數學 科號 0301 共 2 頁第 2 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

二、證明 (每題 11 分，共 4 題 44 分)

1. 設 $S=\begin{pmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{pmatrix}$ 是正定矩陣(positive definite)，其中 S_{ij} 是 $p_i \times p_j$ 矩陣，

   試證 S_{11} 和 $S_{11}-S_{12}S_{22}^{-1}S_{21}$ 也是正定。

2. 令 $A=(a_{ij})$ 是實值對稱方陣(real symmetric)。試證 $\sum_i \sum_j a_{ij}^2$ 等於 A 的 eigen-values 的平方和。

3. 設 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ 是 R^n 中的向量，且線性獨立，$m<n$，令 L 是 $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \cdots, \mathbf{x}_m$ 所張出的線性空間。試求 R^n 中任一點 $\mathbf{y}$ 在 L 的投影。

4. 設 Q 是有理數集合，F_Q 是定義在 Q 上面的實值遞增函數，而且 $\forall r \in Q$，$0 \le F_Q(r) \le 1$。

   定義 $F(x)=\inf\{F_Q(r): x<r, r\in Q\}$，$\forall x \in R$。試證 (a) F 是遞增右連續函數；

   (b) F 的不連續點最多只有可數個(countable，如同正整數的數目)。