九十學年度 統計所 （所）＿＿＿＿組碩士班研究生招生考試

科目 統計學 科號 0303 共 7 頁第 1 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

＊＊＊考生請注意：

- 共有二十五題，每題均爲四選一之選擇題。只須將題號與答案（填入括號內）直式寫入
  答案紙如下：

  1. （ ）
  2. （ ）

  .

  .

  .

  25. （ ）

- 每題四分，若不會之題目請勿隨意猜測（括號中留空白），回答錯者每題倒扣 1.5 分。
- 總分數 ＝ 答對題數 × 4 －答錯題數 × 1.5，若總分數爲負數則以零分計算。

1. 若 $Y_1,\dots,Y_n$ (n>1) 爲一組從 Uniform $(0,2\theta)$ 所取出的隨機樣本，其中 $\theta>0$，現定義 $Y_{(n)} = \max\limits_{1\le i\le n} Y_i$，即 $Y_1,\dots,Y_n$ 中之最大有序統計量且 $\hat{\theta}=CY_{(n)}$，其中 C 爲常數。若 $\hat{\theta}$ 爲 θ 之一不偏估計量，則 C 爲

   (1) $\frac{1}{n}$ (2) $\frac{n}{n+1}$ (3) $\frac{n+1}{2n}$ (4) 以上皆非

2. 在第 1 題中，若 $\hat{\theta}^* = \frac{\sum_{i=1}^{n} Y_i}{n}$ 爲樣本平均數，則根據均方差 （mean squared error）之準則，你會用那一個估計量來估計 θ？

   (1) $\hat{\theta}^*$ (2) $\hat{\theta}$ (3) 有時用 $\hat{\theta}^*$，有時用 $\hat{\theta}$ (4) 以上皆非

3. 假設隨機變數 X 爲一標準常態分佈且 $P(X \le -1) = 0.1587$, $P(X \le -2) = 0.0228$. 若某個大班級某次考試的成績可視爲從常態分佈平均值爲 70 分，變異數爲 64 所取出之隨機樣本。試問成績在 78-86 分之學生人數大約爲成績在 86 分以上之學生人數的幾倍？

(1) 5 倍　(2) 6 倍　(3) 7 倍　(4) 無法判斷

4. 某田徑教練想要在兩名短跑選手中，選出一位代表參加一項即將舉辦的 100 公尺短距離賽跑。該位教練以這兩名選手在一小時中比賽五次（相鄰兩次之間各休息 15 分鐘）所得到的成績做決定。下列是五次比賽的成績紀錄（單位爲秒）：

選手	比賽				
	1	2	3	4	5
甲	12.1	12.2	13.6	12.2	12.1
乙	12.3	12.4	12.4	12.5	12.4

根據上述資料，某統計學者向教練建議應挑選甲選手出賽，則他是依據何種統計量之概念？

(1) 變異數　(2) 平均數　(3) 變異係數　(4) 中位數

5. 在第 4 題中，若另有一統計學者向教練建議應挑選乙選手出賽，則你認爲他是依據下列何種統計量之概念？

(1) 變異數　(2) 平均數　(3) 變異係數　(4) 中位數

6. 假設 $(y_1, x_1), \ldots, (y_n, x_n)$ n 組獨立的資料滿足簡單線性迴歸模型 $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + \varepsilon_i$, 其中 ε_i 爲同態獨立 $N(0, \sigma_\varepsilon^2)$ 分佈。若 $\hat{\beta}_1$ 代表 β_1 之最小平方估計值，如果 $|\hat{\beta}_1|$ 相當大，則下列何者爲真？

(1) x 與 y 這兩個量之相關係數絕對值接近 1 (2) x 與 y 之相關性非常高 (3) 我們可用 x 量來解釋 y 量 (4) 以上皆非

7. 在第 6 題中，若 $x_1,\ldots,x_n$ 爲可自由選取（即考慮一個簡單的設計問題），則下列何種條件可改善最小平方估計量 $\hat{\beta}_0$ 估計 β_0 的精確度（accuracy）？

(1) $\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2$ 越小越好 (2) $\bar{x}$ 越小越好 (3) $\bar{x}$ 越大越好 (4) $\bar{x}$ 越接近 0 越好

(其中 $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} x_i/n$)

8. 某大學之新生給國文及英文老師之教學評鑑分數爲 0 到 4 分。現假設此二教學評鑑分數 X(國文) 和 Y(英文) 爲一近似的二維常態分佈，其中 $\mu_X = 2.9$, $\mu_Y = 2.4$, $\sigma_X = 0.4$, $\sigma_Y = 0.5$, $\rho = 0.8$. 若已知某生給國文老師之教學評鑑分數爲 3.2 分，則他給英文老師的教學評鑑分數介於 2.1 到 3.3 之機率約爲

(1) 0.6898 (2) 0.9641 (3) 0.9544 (4) 0.9772

(註 $P[N(0,1)\le 0.6] = .7257$, $P[N(0,1)\le 1.8] = .9641$, $P[N(0,1)\le 2] = .9772$)

9. 在第 8 題中若某生給國文老師的教學評鑑分數爲 3 分，則他給英文老師的教學評鑑分數約爲

(1) 2.5 分 (2) 2.6 分 (3) 2.8 分 (4) 以上皆非

10. 若隨機變數 $X_1,\ldots,X_n$ 代表大二某班之初等統計成績。假設這 n 個成績爲從一平均數爲 μ (未知)，變異數爲 16 之常態分佈取出之隨機樣本，則 $\mu^2+\mu+1$ 之一致最小變異不偏估計量(uniformly minimum variance unbiased estimator)爲何？

(1) $\overline{X}^2+\overline{X}+1$ (2) $\overline{X}^2+\overline{X}-\frac{16}{n}$ (3) $\overline{X}^2+\overline{X}+\frac{n-16}{n}$ (4) $\overline{X}^2+\overline{X}+\frac{16}{n}$

11. 在第 10 題中 $\mu^2+\mu+1$ 之不偏估計量的 Cramer-Rao 下界爲何？

(1) $\frac{1}{n}(4\mu^2+4\mu+1)$ (2) $\frac{8}{n}(4\mu^2+4\mu+1)$ (3) $\frac{16}{n}(4\mu^2+4\mu+1)$ (4) 以上皆非

12. 在第 10 題中 $\mu^2+\mu+1$ 之最大概似估計量（maximum likelihood estimator）爲何？

(1) $\bar{x}^2+\bar{x}-1$ (2) $\bar{x}^2+\bar{x}-\frac{16}{n}$ (3) $\bar{x}^2+\bar{x}+\frac{16}{n}$ (4) 以上皆非

13. 假設 $Y_1,\ldots,Y_n$ 爲從 Weibull 分佈所取出之一組隨機樣本，它們的機率密度函數爲 $g(y：\theta)=k\theta y^{k-1}e^{-\theta y^k}$， $y>0, k, \theta>0$, 其中 k 爲一已知常數。 對於檢定 $H_0:\theta\geq\theta_0$ 對 $H_1:\theta<\theta_0$ (θ_0 爲已知) 的一致最具檢定力檢定(uniformly most powerful test) 之棄卻域爲何？

(1) $\sum_{i=1}^{n}Y_i^k>C$ (2) $\sum_{i=1}^{n}Y_i^k<C$ (3) $\sum_{i=1}^{n}Y_i<C$ (4) $\sum_{i=1}^{n}Y_i>C$ ， 其中 C 的選擇將使得顯著水準滿足所要求。

14. 在第 13 題中一致最具檢定力檢定之檢定力函數(power function)爲何？

(1) $P(\chi^2_{2n}>\frac{\theta}{\theta_0}\chi^2_{2n,\alpha})$ (2) $P(\chi^2_{2n}>\frac{\theta_0}{\theta}\chi^2_{2n,\alpha})$ (3) $P(\chi^2_{2n}>\theta\chi^2_{2n,\alpha})$

(4) 以上皆非

(提示： $P(\chi^2_{2n}>\chi^2_{2n,\alpha})=\alpha$ ； 考慮 $X_i=2\theta Y_i^k$, $i=1,\ldots,n$ 之分佈）

15. 假設 $Y=\overline{X}$ 爲從常態分佈 $N(\theta,\sigma^2)$ 取出之 n 個 獨立同態隨機變數的平均值，其中 σ^2

爲已知常數且參數 θ 擁有 $N(\theta_0,\sigma_0)$ 之先驗分佈(prior distribution)。當考慮方差損失

(squared error loss) 函數時，θ 之貝氏估計量 $\hat{\theta}$ 可寫成 $a\overline{Y}+b\theta_0$ 之形式，則 $a=$ ？

(1) $\dfrac{\sigma^2/n}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}$ (2) $\dfrac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}$ (3) $\dfrac{\sigma_0^2/n}{\sigma_0^2/n+\sigma^2}$ (4) $\dfrac{\sigma^2}{\sigma_0^2/n+\sigma^2}$

16. 在第 15 題中，針對貝氏估計量，下列的敘述何者爲非？

(1) 當其它條件不變時，n 變大則先驗分佈對 $\hat{\theta}$ 的影響變小 (2) 當其它條件不變時，σ_0^2 變大則先驗分佈對 $\hat{\theta}$ 的影響變小 (3) 當其它條件不變時，σ^2 變大則先驗分佈對 $\hat{\theta}$ 的影響變大 (4) 當其它條件不變時，σ_0^2 變大則先驗分佈對 $\hat{\theta}$ 的影響力變大。

17. 在第 15 題中，若依據貝氏理論則 θ 的一個 95%信賴集合(credible set)爲何？

(1) $\dfrac{y\sigma^2/n+\theta_0\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\sigma^2/n} \pm 1.96\sqrt{\dfrac{(\sigma^2/n)\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}}$ (2) $\dfrac{y\sigma_0^2+\theta_0\sigma^2/n}{\sigma_0^2+\sigma^2/n} \pm 1.96\sqrt{\dfrac{(\sigma^2/n)\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}}$

(3) $\dfrac{y\sigma^2/n+\theta_0\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\sigma^2/n} \pm 1.96\sqrt{\dfrac{\sigma^2/n}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}}$ (4) $\dfrac{y\sigma_0^2+\theta_0\sigma^2/n}{\sigma_0^2+\sigma^2/n} \pm 1.96\sqrt{\dfrac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2+\sigma^2/n}}$

(提示：$P[N(0,1)\le 1.96]=0.975$)

18. 假設隨機變數 X 爲一個二項分佈，其中 $n=5, p=\theta$, 且其機率密度函數如下：

x	0	1	2	3	4	5
$f(x;\frac{1}{2})$	$\frac{1}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{10}{32}$	$\frac{5}{32}$	$\frac{1}{32}$
$f(x;\frac{3}{4})$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{90}{1024}$	$\frac{270}{1024}$	$\frac{405}{1024}$	$\frac{243}{1024}$

現欲利用此 "單一" 隨機變數來檢定 $H_0:\theta=\frac{1}{2}$ 對 $H_1:\theta=\frac{3}{4}$, 若顯著水準 $\alpha=6/32$,

則最佳棄卻域 (best critical region) 爲何？

(1) $\{x;\ x=0,4\}$　(2) $\{x;\ x=1,5\}$　(3) $\{x;\ x=4,5\}$　(4) 以上皆非

19. 在第 18 題中，最佳棄卻域的檢定力 (power) 爲何？

(1) $\frac{406}{1024}$　(2) $\frac{258}{1024}$　(3) $\frac{648}{1024}$　(4) $\frac{918}{1024}$

20. 若 X_1, X_2, X_3 分別代表三個獨立的卡方分佈，其自由度分別爲 r_1, r_2 和 r_3 ，則下列何者爲非？

(1) X_1/X_2 與 X_1+X_2 相互獨立　(2) $\frac{X_1/r_1}{X_2/r_2}$ 與 $\frac{X_3/r_3}{(X_1+X_2)/(r_1+r_2)}$ 相互獨立

(3) X_1/X_2 與 $X_1+X_2+X_3$ 相互獨立　(4) $X_1+X_2+X_3$ 與 $-X_3$ 相互獨立

21. 假設 $X_1,\ldots X_n$ 爲一組獨立同態分佈，其機率密度函數爲 $f(x;\theta)=1,\ \theta-\frac{1}{2}\le x\le\theta+\frac{1}{2}$,

$-\infty<\theta<\infty$, $f(x;\theta)=0,\ x\notin[\theta-\frac{1}{2},\theta+\frac{1}{2}]$. 現令 $Y_1<Y_2<\ldots<Y_n$ 代表隨機樣本

$X_1,\ldots,X_n$ 之有序統計量，則下列何者 "不是" 參數 θ 之最大概似估計量 (maximum likelihood estimator)？

(1) $(4Y_1+2Y_n+1)/6$ (2) $(Y_1+Y_n)/2$ (3) $Y_n-2/3$ (4) $(2Y_1+4Y_n-1)/6$

22. 假設 X_1 和 X_2 是二個獨立同態分佈，其機率密度函數爲 $f(x;\theta)=\dfrac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}}$ ，$0<x<\infty$ ，$f(x;\theta)=0$ 當 $x\notin(0,\infty)$. 現欲檢定 $H_0:\theta=2$ 對 $H_1:\theta=1$ ，若選擇棄卻域 (critical region) 爲 $\left\{(x_1,x):\dfrac{f(x_1;2)f(x_2;2)}{f(x_1;1)f(x_2;1)}\le\dfrac{1}{2}\right\}$ 則這個檢定的顯著水準爲多少？

(1) $1-\ell n2$ (2) $\frac{1}{2}(1-\ell n2)$ (3) $\frac{1}{2}(1+\ell n2)$ (4) $\frac{1}{4}(1+\ell n2)$

23. 在第 22 題中，棄卻域的檢定力 (power) 多少？

(1) $\frac{3}{4}-\frac{1}{2}\ell n2$ (2) $\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\ell n2$ (3) $\frac{3}{4}-\ell n2$ (4) $\frac{3}{4}+\ell n2$

24. (a) Cauchy 分佈機率密度函數下 -2 到 2 之面積 (b) 自由度爲 10 的 t 分佈機率密度函數下 -2 到 2 之面積 （c）標準常態分佈機率密度函數下 -2 到 2 之面積 。依據上述資訊，下列面積關係何者爲真？

(1) (a)>(b)>(c) (2) (a)<(c)<(b) (3) (c)>(b)>(a) (4) 無法比較

25. 若 X 爲一連續型的隨機變數且 $E[(X-EX)^3]/\{E[(X-EX)^2]\}^{\frac{3}{2}}<0$, 則下列何者爲真？

（1） X 的機率密度函數偏向右方 (skewed to the right) (2) X 的機率密度函數偏向左方

(3) $P(X<0)\ge\frac{1}{2}$ (4) $P(X>0)\ge\frac{1}{2}$