入十九學年度統計所碩士班研究生招生考試

科目 機率論 科號 0302 共 2 頁第 1 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

1. (05%) 假設隨機變數 X 的 moment generating function 是

$$M(t)=\frac{1}{2}+\frac{1}{4}e^{-t}+\frac{1}{4}e^{t}\text{，求 } EX^3\text{。}$$

2. (10%) 假設燈泡之壽命具有指數分配，其平均壽命爲一年。
   - (a) 問燈泡在使用二年後，能繼續使用至第三年底的機率爲何？
   - (b) 若某一系統中採用兩個燈泡並聯，只要有一個燈泡沒壞，此系統即可運作。問此系統壽命的分配爲何？又系統的平均壽命爲何？

3. (10%) 假設兩隨機變數 X 與 Y 的聯合分配爲在單位圓上的均勻分配，即其聯合密度函數爲 $f(x,y)=\frac{1}{\pi},\quad x^2+y^2\le 1$。
   求 $Var(Y)$

4. (10%) 假設隨機變數 X 的分配爲 $N(\mu,\sigma^2)$。定義一新的隨機變數 $Y=\max\{X-c,0\}$，其中 c 爲一任意實數，求 EY。

5. (15%) 假設某公司的電梯具有 750 公斤的安全負重量，當電梯負重超過安全值時，警鈴即會響起。假設大樓員工的體重呈一平均值爲 60 公斤，標準差爲 10 公斤的常態分配。
   - (a) 若吾人之體重爲 90 公斤，當電梯中已有 11 人時，再步入電梯中，此時警鈴響起的機率爲何？
   - (b) 若要裝置新款的電梯，並希望 12 人同乘新電梯時，警鈴響起的機率只有 5%，問應裝置安全負重至少爲多少的電梯？
   - (c) 若大樓的員工體重之分配呈 Unif(40,90) 則(a)的結果又如何？解釋你的理由。

八十九學年度統計所碩士班研究生招生考試

科目 機率論 科號 0302 共 2 頁第 2 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

6. (10%) 設 $Y \sim uniform(0,10)$，則 $f(x) = x^2 + xY + Y + 1 = 0$ 的兩個根都是實數的機率是多少？

7. (10%) 設 $X \sim Gamma(\alpha,\lambda)$，$Y \sim Gamma(\beta,\lambda)$，而且 X,Y 是獨立。則 $U = X+Y$，$V = X/(X+Y)$ 的聯合分配是什麼？U,V 獨立嗎？

8. (10%) n 個人各帶一頂帽子，脫帽混合之後，各人隨機選一頂帽子。設 X = 選到自己帽子的人數。試求 $E(X)$ 和 $Var(X)$。

9. (15%)
   (a). (8%)試證 Chebyshev 不等式：$\Pr\{|X-\mu| \ge c\} \le E(X-\mu)^2/c^2$，其中 μ 是隨機變數 X 的期望值。(如果你利用 Markov 不等式證明，那麼你需要證明 Markov 不等式。)
   (b). (2%)定義機率收斂 (converges in probability)。
   (c). (5%)若 $X_1, X_2, \cdots$ 是 $i.i.d.\ Bernoulli(p)$ (亦，只取 0, 1 兩值，取 1 的機率是 p，取 0 的機率是 $1-p$)，試證，當 $n \to \infty$，$\dfrac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}$ 機率收斂到 p。

10. (5%) 設 F 是個分布函數(不見得是連續型)，$0 < p < 1$，定義 $F^{-1}(p) = \inf\{x : F(x) \ge p\}$，試證 $\{x : p_0 \le F(x)\} = \{x : F^{-1}(p_0) \le x\}$。