

# 國立清華大學命題紙

八十八學年度統計所碩士班研究生招生考試

科目 機率論 科號 0302 共 2 頁第 1 頁 \* 請在試卷【答案卷】內作答

1. 對於一個隨機變數  $X$ ，我們知道它的期望值是 10，變異數是 15。
- 7% (a) 概略估算  $\Pr\{5 \leq X \leq 10\}$  有多大，解釋你的答案，你可以引用任何知名定理，但請詳細敘述。
- 3% (b) 加上一個條件，使  $\Pr\{5 \leq X \leq 10\}$  完全確知。
- (10%)
2. 考慮一個 Markov Chain  $\{X_n : n \geq 1\}$ ，其 state space  $S = \{1, 2\}$ ，其 transition probabilities 是  $p_{11} = 0.7$ ， $p_{12} = 0.3$ ， $p_{21} = 0.4$ ， $p_{22} = 0.6$ ，求  $\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr\{X_n = i\}$ ， $i = 1, 2$ 。
- (10%)
3.  $U$  是均勻分佈在區間  $(-\pi/2, \pi/2)$  的隨機變數，令隨機變數  $X = \tan U$ 。求  $X$  的機率密度函數 (probability density function) 與累積分配函數 (Cumulative distribution function)。
- (10%)
4. 隨機變數  $X$  的 moment generating function 是
- $$\frac{7e^{3x}}{10 - 3e^{2x}}$$
- 求  $X$  的 distribution 與  $X$  的期望值。
- (10%)
5. 投擲一硬幣，設其出現正反的機率各為 0.5。今連續投擲該硬幣，直到接連出現 3 次正面為止，所需投擲的次數為  $X$ ，求  $E(X)$ 。

八十八學年度統計所碩士班研究生招生考試

科目 機率論 科號 0302 共 2 頁第 2 頁 \* 請在試卷【答案卷】內作答

(10%)

6. 假設東方人的身高( $X$ )與體重( $Y$ )之相關係數為0.65且已知

$$E(Y|X=x) = 22.5 + 0.25x$$

(a) 試求  $Var(Y)/Var(X) = ?$

(b) 已知  $E(X) = 170$ ，試求  $E(Y) = ?$

計量

(10%)

7. 已知某次測驗共出50題是非題，其計分方式如下：

(1) 答對一題得2分

(2) 答錯一題，除該題不得分之外，且須倒扣0.5分

若某生的實力（每一題的答對率）為8成，且假設所有題目皆相互獨立，試問

(a) 該生所獲得的平均分數及其變異數分別是多少？

(b) 該生之考試成績60分以上之機率？（註：請用標準常態之累積分配函數cdf表示之）。

15%

8.  $X$  為一連續型隨機變數其cdf定義如下：

$$F_X(t) = \Pr(N(t) \geq n)$$

其中  $N(t)$  服從 Poisson 過程且其平均發生率  $\mu = 10$ 。

(a) 試求  $X$  之機率密度函數(pdf)。

(b) 試求  $X$  之平均數及變異數。

15%

9. 令  $(X_1, \dots, X_n)$  是從一母群體其cdf為  $F(x)$  抽出之隨機樣本，且令  $X_{(1)} \leq \dots \leq X_{(n)}$  為

$(X_1, \dots, X_n)$  之順序統計量，試求

(a)  $F(X_{(n)}) - F(X_{(1)})$  之抽樣分配。

(b)  $E[F(X_{(n)}) - F(X_{(1)})]$  及  $Var[F(X_{(n)}) - F(X_{(1)})]$ 。