

# 國立清華大學命題紙

八十八學年度統計所碩士班研究生招生考試

科目 基礎數學 科號 0301 共 2 頁第 1 頁 \* 請在試卷【答案卷】內作答

1. (10%)

敘述並證明微積分基本定理。

2. (10%)

7% (a) 寫出求積分

$$\int_a^b f(x) dx$$

逼近值之Simpson法則及其準確度。假設區間個數為 $n$ 。

3% (b) 欲求  $\ln(2)$  的準確至小數點後第四位之逼近值，請問 $n$ 須取多大？

3. (5%)

電影院的銀幕架設在觀眾平視視線之6呎之上。若銀幕高30呎，求最適之觀眾席距離（即獲得最大視角之距離）。

4. (10%)

鐘擺之長度 $L$ 與振盪一個來回的時間 $P$ 之關係為

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

其中 $g$ 為重力加速度。

5% (a) 證明長度之微量改變 $dL$ 與週期之改變 $dP$ 滿足

$$\frac{dP}{P} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{dL}{L}}$$

5% (b) 長90cm之鐘擺在時鐘每小時慢15秒時，應如何校正？

5. (5%)

求下列積分之值

$$\int_0^1 \int_0^1 e^{-(x-2)^2 - 2(x-2)(y-3) - 2(y-3)^2} dx dy.$$

# 國立清華大學命題紙

八十八學年度統計所碩士班研究生招生考試

科目 基礎數學 科號 0301 共 2 頁第 2 頁 \* 請在試卷【答案卷】內作答

6. (10%)

請問  $p$  分別屬何範圍時，下列級數為收斂

5% (a)  $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k(\log k)^p}$ ,

5% (b)  $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p^k}{k^p}$ 。

7. (10%)

令

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 & 2 \\ 2 & 6 & 9 & 5 \\ -1 & -3 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \quad \text{解 } AX = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

8. (20%)

5% (a) 何謂正定(positive definite)矩陣，半正定(positive semi-definite)矩陣?

5% (b) 證明半正定矩陣之特徵值(eigenvalue)皆非負。

5% (c) 說明正定矩陣之特徵值及特徵向量之幾何意義。

5% (d) 證明隨機向量之共變異矩陣(covariance matrix)為半正定。

9. (20%)

令

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

5% (a) 求  $A$  之特徵多項式。

5% (b) 求  $A$  之特徵值和特徵向量。

5% (c) 證明  $A$  可對角化。

5% (d) 求  $A^n$ 。