

八十七學年度統計學研究所碩士般研究生入學考試

科目 統計學 科號0303 共 2 頁第 1 頁*請在試卷(答案卷)內作答

20%

1. 假設 $H_0: X$ 有密度函數 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ 而 $H_1: X$ 有密度函數

$$\frac{1}{\pi} \frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty.$$

(a) 給定顯著水準(significance level) $0 < \alpha < 1$, 試利用單一觀測量 X 找出最具檢定力之檢定(most powerful test) (註:你必須完全指出最佳棄卻域(best critical region)的範圍)。 (7%)

(b) 試求出(a)中之檢定的檢定力(power)。 (5%)

(c) 若 α^* 代表第一類型錯誤的機率(probability of Type I error), β^* 代表第二類型錯誤的機率, 試找出使得 $2\alpha^* + \beta^*$ 為最小的棄卻域。根據何種理論可證明或反証這個棄卻域是或不是最佳棄卻域。 (8%)

15%

2. 令 X_1, X_2, \dots, X_n 表示一組從Poisson (λ) 取出的隨機樣本, 其中 $0 < \lambda < \infty$ 表示未知參數, 定義 $g(\lambda) = P(X_n = k)$, 其中 k 為一固定的正整數。

(a) 試求出 $g(\lambda)$ 的最概估計量(maximum likelihood estimator)。 (7%)

(b) 找出 $g(\lambda)$ 的不偏最小變異估計量(unbiased minimum variance estimator) (8%)

15%

3. 令 $X_1, \dots, X_n, n > 2$, 代表從密度函數 $f(x; \theta) = \theta x^{\theta-1}, 0 < x < 1, 0 < \theta < \infty$, 其中 θ 代表未知參數。

(a) 若 $Z = -\sum_{i=1}^n \ln X_i$, 試導証 Z 為何種分佈。找出 Z 的一個函數, 並證明此函數為 θ 之不偏(unbiased)估計量。 (5%)

(b) (a)中 θ 之不偏估計量是否達到Rao-Cramer下界(lower bound)? (5%)

(c) 利用統計量 Z , 找出 θ 的一個等尾(equal tails)95%信賴區間。 (5%)

八十七學年度統計學研究所碩士般研究生入學考試

科目 統計學 科號0303 共 2 頁第 2 頁*請在試卷(答案卷)內作答
15%

4. 某牙科診所負責人欲瞭解患者來到診所就醫之間隔時間(inter-arrival time)是否為一指數分配? 今以每一小時為單位觀測區間, 共觀測30區間, 經整理後得到下表:

x	0	1	2	3	4
$0(x)$	12	10	6	0	2

其中 x 表示病人就診人數, $0(x)$ 表示其發生頻率(frequency)。在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下, 試檢定上述假設是否正確? 理由何在?

(已知 $\chi_{0.05}^2(2) = 5.991$, $\chi_{0.05}^2(3) = 7.815$, $\chi_{0.05}^2(4) = 9.488$)

15%

5. 假設體重(x_1)與身高(x_2)為推估人體肥胖程度(Y)之適當解釋變數, 且其關係式如下:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{1i} + \beta_2 x_{2i} + \varepsilon_i, \quad \varepsilon_i \stackrel{iid}{\sim} (0; \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n$$

若解釋變數 x_2 未被考慮, 只用解釋變數 x_1 來預測 Y , 且所建立的最小平方迴歸方程式為 $\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_{1i}, i = 1, \dots, n$

- (a) 試計算 $E(\hat{\beta}_1)$ 。(5%)
 (b) 試計算 $\hat{\beta}_1$ 之MSE(Mean Squared Error)。(5%)
 (c) 試問 $\hat{\beta}_1$ 在何種條件下為 β_1 之不偏估計量? (5%)

20%

6. 欲探討溫度與PH值是否對某製程之產量有影響, 工程師選定(高溫、低溫)及(高酸鹼值、低酸鹼值), 共四種組合, 在每一種組合下, 各做二次實驗, 共得到下列數據。(已知 $t_{0.025}(4) = 2.776$)

PH值 溫度	低酸鹼值	高酸鹼值
	7.9 7.8	13.2 12.8
高溫	6.5 6.2	18.2 17.8

- (a) 在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下, 試問溫度是否對產量有顯著差異? (5%)
 (b) 在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下, 試問PH值是否對產量有顯著差異? (5%)
 (c) 在顯著水準 $\alpha = 0.05$ 下, 試問溫度與PH值是否有交互影響? (10%)