

八十七學年度統計學研究所碩士般研究生入學考試

科目 機率論 科號Q302 共 2 頁第 1 頁*請在試卷(答案卷)內作答

1. 設有A,B,C三台機器製造同一種產品，其產量分佔總產量之20%，30%及50%，又三台機器的產品不良率分別為5%，4%及2%。現從一批產品中抽出一個來檢驗，知其為不良品，請問此產品是機器A製造的機率為何？ (12%)
2. 某砲手射擊命中率為0.7。今對一目標射擊，他要發射幾發砲彈方能保證至少有一發命中的機會大於0.99。 (12%)
3. 一隨機變數(random variable)具動差母函數(moment generating function) $M(t) = \frac{2e^{2t}}{3 - e^{3t}}$, $t < 0$ ，求其機率分佈。 (12%)
4. X 和 Y 是互相獨立的波瓦松隨機變數(Poisson r.v.'s)；他們的期望值分別是 λ_1 和 λ_2 ，求條件期望值 (Conditional expectation) $E[X | X + Y = n]$ 。 (12%)
5. 設一袋子裡有編號1,2,3,...,r 的 r 個球。今採用歸還抽樣法，每次抽出一球，記錄其號碼，再放回袋子裡。這個過程，重覆執行，直到出現 k (小於 r 的整數) 個不同的號碼為止，其抽樣次數記為 S_k ，求 S_k 的期望值 $E(S_k)$ 。 (15%)
6. 某次選舉，一候選人想要預估其支持率 p ，他將隨機抽樣訪查 900 個選民，用這 900 個樣本的支持率 p_{900} 來估計未知的支持率 p 。用常態近似法，求該估計的誤差超過 0.025 的機率有多大，亦即求 $\Pr\{|p_{900} - p| \geq 0.025\}$ 。將你的答案用標準常態分佈的累積分布函數 $\Phi(x)$ 表示。(10%)

八十七學年度統計學研究所碩士般研究生入學考試

科目 機率論 科號0302 共 2 頁第 2 頁*請在試卷(答案卷)內作答

7. 若 X 是一隨機變數， $g(x)$ 為一正值遞升(positive increasing)函數，且 $E[g(X)] < \infty$ ，

(i) 證明 $\Pr\{X > t\} \leq \frac{E[g(X)]}{g(t)}$ 。(5%)

(ii) 若 $E(X) = 0$ ， $\text{Var}(X) = \sigma^2$ ，且 X 的累積分佈函數為 $F(x)$ ，利用(i)證明

$$F(x) \geq \frac{x^2}{\sigma^2 + x^2}, \forall x > 0。$$

【提示：取 $g(x) = (x+c)^2$ ，並適當選擇 c 】。(12%)

8. 一個正值連續型(positive continuous)的隨機變數 X ，其風險函數(hazard rate function) $r(t)$ 定義為

$$r(t) = \frac{f(t)}{1 - F(t)},$$

其中 $f(t)$ 是 X 的機率密度函數， $F(t)$ 為其累積分佈函數。已知抽煙者壽命的風險函數是不抽煙者壽命的風險函數的2倍。若一個50歲不抽煙者活過60歲的機率是0.7，請問抽煙者的對應機率有多大；亦即一個50歲抽煙者活過60歲的機率有多大？(10%)