八十六學年度統計學研究所碩士般研究生入學考試
科目 機率論 科號 0302共3頁第1頁*請在試卷（答案卷）內作答

壹. 請將適當答案（計算過程免敍述）依次序寫在答案紙上，每個空格5分。

註：可用之計算常數及公式：

$$e^{-1}=0.3678,\ e^{-0.6}=0.5488,\ e^{-4.2}=0.0149,\ \int_0^{1.91}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{t^2}{2}}dt=0.4719.$$

1. 在連續投擲一枚均勻銅板時，在正面（人頭）第二次出現之前，所需出現反面之次數X 則$P(X=x)=$ **(1)**，$x=0,1,2,\ldots$。

2. 若一箱中有8支藍色，4支白色標籤，現從此箱中隨機不歸還取出三支，則此三支標籤中，藍色標籤數之平均值爲 **(2a)** 其變異數爲 **(2b)**。

3. 假設我們投擲一只均勻骰子及一枚均勻銅板，先投擲骰子，其出現之點數爲Y，然後再投擲銅板連續Y次，則銅板出現4次正面之機率爲 **(3)**。

4. 若有100個人在一集會中丟擲個人的右腳鞋子在房子正中，然後令每個人隨機地選拿一支鞋子，則剛好有5個人選中自己的鞋子之機率約爲 **(4)**（請用近似法計算之）。

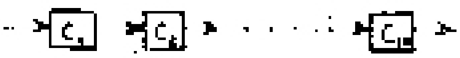
5. 假設某廠牌燈泡之壽命爲指數分布其平均壽命爲10天，則在一年內須換上此種燈泡50個以上之機率爲 **(5)**。

6. 假設中山高泰山收費站發生車禍次數平均每星期爲4.2次，又已知在任何區間[t, t+s]，其時間長爲s個單位時間內，有k次車禍發生之機率爲$(\lambda s)^k e^{-\lambda s}/k!$, $k=0,1,2,\ldots$，此處λ爲單位時間內車禍發生率，則明天發生車禍多於兩次之機率爲 **(6)**。

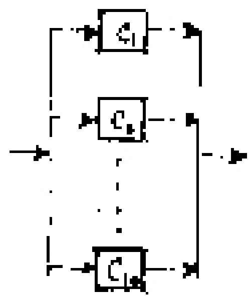
7. 若一系統用十個零件串連（如圖一）使用，每個零件之壽命大於100小時之機率爲0.99，則此系統之壽命大於100小時之機率爲

(7a) ；又另一系統（如圖二）用此十個零件並聯使用，則此系統之壽命大於100小時之機率為 **(7b)** ；但若用4個相同零件按圖三方式聯接，此時每個零件之壽命分布為
$P(T_i \ge t) = e^{-\lambda t}$，$i = 1,2,3,4$，則此系統之壽命小於 t 之機率為 **(7c)** ，此處 λ 為未知參數。

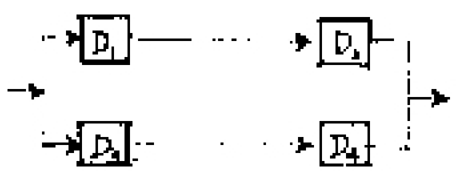
圖一



圖二



圖三



8. 設一母全体具有100個標號不同之球，每個球被抽出之機會相等，今採用歸還抽樣法每次抽出一球直到10個不同號碼球被取出為止，則其平均需抽出 **(8)** 次才能有此現象發生（請將小數點後之數寫出）。

9. 假設我們有兩枚銅板，一枚為均勻正反面，另一枚為兩面皆為正面，某人從這兩枚中隨機取出一枚將它投擲三次，而且已知結果是三次皆為正面出現，則此結果來自那一枚兩面皆為正面之機率為 **(9)** 。

10. 設 $X_1, X_2, \ldots, X_n$ 為獨立柏努利隨機變數，其母數為 p（未知），則 n 應大於 **(10)** 使得 $P(|\bar{X}_n - p| > 0.1) \le 0.01$ 成立，此處 $\bar{X}_n = \sum_{1}^{n} X_i / n$。

八十六學年度統計學研究所碩士班研究生入學考試

科目 機率論 科號 0302 共3頁第3頁 *請在試卷（答案卷）內作答

11. 若 Y 為 $N(X, \tau^2)$ 分布，此處 X 為隨機變數，其分布為 $N(\mu, \sigma^2)$，則 Y 之密度函數為 **(11)**____，$-\infty < y < \infty$ 。

貳. 證明題

12. (a) 什麼叫做特徵函數(characteristic function)之反轉公式(inversion formula) 請敘述。又令 U 與 X_n 及 X 獨立之標準常態隨機變數，試問對 $a<b$ 及 c，a與b需何條件下式成立

10%

$$P(a < X + cU < b) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-iat} - e^{-ibt}}{it} e^{-c^2t^2/2} \varphi_X(t)dt \text{ 。}$$

(b) 若 $X_n (n \geq 1)$ 及 X 皆為機率空間 $(\Omega, \Im, P)$ 上之隨機變數，其分布函數及特徵函數個別為 $F_{X_n}(x), F_X(x); \varphi_{X_n}(t), \varphi_X(t)$ 且滿足 $-\infty < t < \infty$

10%

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_{X_n}(t) = \varphi_X(t)$$

試問何時之 x 會使 $\lim_{n\to\infty} F_{X_n}(x) = F_X(x)$，此處 $-\infty < x < \infty$，並依(a)略証之。

13. (a) 設 (X, Y) 為隨機向量，$h(X)$ 為 X 之任意函數，則能使 $E\{Y - h(X)\}^2$ 達到最小之 $h(x)$ 之形態(form)為何？

10%

(b) 請證明 (a)。