八十四學年度 統計 所＿＿組碩士班研究生入學考試

科目：機率論 科號 0302 共 3 頁第 1 頁 *請在試卷【答案卷】內作答

20% 1. 某種形式之六合彩玩法如下：參加者可自 $1, 2, 3, \cdots, 60$ 共 60 個數字中歸還取樣任選六個數字，若此六個數字完全符合開獎之六個數字（順序不論）則得大獎

5% (a) 假設有 1000 次獎已開出，即已有 6000 個數字選出，則某一特定數字（例如 33）大約出現幾次？出現次數之標準差約多大？你須要那些假設？

7% (b) 每次開獎 6 個數字總和之期望值約爲多少？和之標準差約爲多少？

8% (c) 某明牌專家認爲每次開獎之六個數字和應近似一常態分布，故過去 1000 組中，每組之六個數字之和應爲 (b) 中所求期望值附近變動之常態分布。故他建議參加者玩此種六合彩時，應該要選六個數字加起來很靠近 (b) 中所求之期望值。你同意嗎？簡述你的理由。

15% 2. 假定甲地地震發生爲一卜瓦松過程，其中

$$P\{\text{甲地在}(t, t+h)\text{內發生一地震}\} = \lambda_1(t)h + o(h)$$

而乙地地震的發生亦爲一卜瓦松過程，其中

$$P\{\text{乙地在}(t, t+h)\text{內發生一地震}\} = \lambda_2(t)h + o(h)$$

5% (a) 若 $\lambda_1(t) = 2, \lambda_2(t) = 1$，且已知在某固定時間 $[0, t_0]$ 內，甲，乙二地各發生了一次地震，則過去的這二次地震中甲地先發生地震的機會爲多少？

5% (b) 若在 (a) 中是 $[0, t_0]$ 之間甲地發生了二次，乙地發生了一次，則發生的順序爲甲地，乙地，甲地，之機會爲多少？

5% (c) 若 $\lambda_1(t) = t^2, \lambda_2(t) = t$ 且在 $[0, t_0]$ 內甲，乙二地各發生一次，令 $t_0 = 1$ 則發生之順序爲甲地先乙地後之機會爲多少？

八十四學年度 統計 所＿＿組碩士班研究生入學考試

科目：機率論 科號 0302 共 3 頁第 2 頁 ＊請在試卷【答案卷】內作答

15% 3. 假定某電視猜獎節目玩法如下：A, B, C三個門，只有一個門後有獎品，任何參加的人任選其中一個門，在開該門之前，主持人會將另外二個門中之一個沒有獎的門打開給參加者看其中無獎品，此時主持人會問參加者這時要不要換另外一個尚未開的門（例如參加者選B門，在未開B門前主持人開A門給參加者看其後無獎品，問要不要換C門）現在你有一個朋友想參加這樣的猜獎節目且希望得到獎品，你要不要勸他在猜獎時換門或者無所謂（即換與不換相同）？ 爲什麼？簡述理由。（即求換門得獎的機會爲多少？ 不換門得獎的機會爲多少？）

15% 4. 令$U_i, i = 1, \cdots, n$爲i.i.d. Uniform $[0,1]$變數，請問當$n \to \infty$時

7% (i) $\Pi_{i=1}^n U_i \xrightarrow{p} ?$ (in probability)

8% (ii) $\Pi_{i=1}^n (1 - \frac{U_i}{n}) \xrightarrow{p} ?$

30% 5. 令$X_i, i = 1, \cdots, n$爲出自對稱於0點之分布F的iid.變數，給定$t \in R$，定義

$$Z_n^{(1)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n \left(1_{\{X_i < t\}} - 1_{\{X_i > -t\}}\right)$$

$$Z_n^{(2)}(t) = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_1^n Y_i \left(1_{\{X_i < t\}} - 1_{\{X_i > -t\}}\right)$$

其中$Y_i, i = 1, \cdots, n$爲獨立於$\{X_i\}$之i.i.d.變數，$E(Y_i) = 0, var(Y_i) = \sigma^2$，而

$$1_A = \begin{cases} 1 & \text{若A發生} \\ 0 & \text{若A不發生。} \end{cases}$$

八十四學年度 統計 所＿＿組碩士班研究生入學考試

科目： 機率論 科號 0302 共 3 頁第 3 頁 ＊請在試卷【答案卷】內作答

5% (i) 請計算$E[Z_n^{(1)}(t)]$, $E[Z_n^{(2)}(t)]$, $E[Z_n^{(1)}(t_1)\cdot Z_n^{(2)}(t_2)]$ $(t_1 < t_2)$.

當$n\to\infty$時，

7% (ii) $Z_n^{(1)}(t) \xrightarrow{d} ?$ (in distribution)

8% (iii) $Z_n^{(2)}(t) \xrightarrow{d} ?$

10% (iv) $\left(Z_n^{(1)}(t_1), Z_n^{(1)}(t_2)\right) \xrightarrow{d} ?$ $(t_1 < t_2)$.

5% 6. 令$X_i, i = 1,\cdots,2n$, 為i.i.d.隨機變數，它們的分布為$P(X_i = 1) = \frac{1}{2} = P(X_i = 0)$。吾人已知下列等式對某與$n$無關之常數$C_0$成立

$$P(\Sigma_1^{2n} X_i = n) = C_o \cdot \frac{1}{n^\alpha}.$$

(3%) (i) 請推測α值或在下列選項中擇一

(1) $\alpha = 1$

(2) $\alpha = \frac{1}{2}$

(3) $\alpha = \frac{1}{4}$

(2%) (ii) 請解釋 (i)之理由。