

八十四學年度 統計 所 組碩士班研究生入學考試

科目：基礎數學 科號 0301 共 3 頁第 1 頁 \*請在試卷【答案卷】內作答

1.(15%) 針對級數  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$

- (a) (5%) 若  $|x| < 1$ , 試證級數收斂。  
 (b) (5%) 若  $x = 1$ , 級數是否收斂? 需證明。  
 (c) (5%) 若  $x = -1$ , 級數是否收斂? 需證明。

2.(24%)

- (a) (6%)  $\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} \frac{1}{x} \exp\left(-x - \frac{y}{x}\right) dx dy = ?$   
 (b) (6%) 試證  $\int_0^t e^{-ux} \sin x dx = \frac{1}{1+u^2} (1 - e^{-ut}(u \sin t + \cos t))$   
 (c) (6%)  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t \frac{\sin x}{x} dx = ?$   
 (d) (6%)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \int_0^{\pi/2} \left( \frac{1}{1 + \sin x} \right)^n dx \right)^{1/n} = ?$

3.(11%) Stirling Formula 說：

$$n! \simeq \sqrt{2\pi} n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

但是請證明比較簡單的上界：

$$n! \leq e n^n e^{-n} \sqrt{n}$$

其中  $e$  是自然對數的底。(提示：我們會做  $\int_1^n \log x dx$ )

八十四學年度 統計 所 組碩士班研究生入學考試

科目： 基礎數學 科號 0301 共 3 頁第 2 頁 \*請在試卷【答案卷】內作答

4. (5%) 線性變換  $\theta: R^3 \rightarrow R^2$ ，其中  $\theta$  定義為

$$\theta \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a + b - c \\ a + 2b + c \end{pmatrix}。$$

試求  $\theta$  對應於  $R^3$  基底  $A = \left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$

以及  $R^2$  基底  $B = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$  的代表矩陣。

5. (5%) 設  $\alpha$  為  $x^2 + x + 1 = 0$  的根。

試求矩陣  $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha^2 \\ 0 & \alpha & \alpha \end{bmatrix}$  的固有值 (eigenvalues)。

6. (5%) 矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 8 & 1 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 3 \\ 3 & 6 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 8 & 7 \end{bmatrix}$  具有固有值 (eigenvalues)  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ 。

試求  $\lambda_1\lambda_2 + \lambda_1\lambda_3 + \lambda_1\lambda_4 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_2\lambda_4 + \lambda_3\lambda_4$ 。

7. (5%) 令  $A, B$  均為  $n \times n$  矩陣。

試問  $AB$  與  $BA$  是否有相同的固有值 (eigenvalues)?

若“是”，請證明。若“不是”，請給反例。

八十四學年度 統計 所 組碩士班研究生入學考試

科目： 基礎數學 科號 0301 共 3 頁第 3 頁 \*請在試卷【答案卷】內作答

8. (10%) 設  $A = \left\{ \begin{bmatrix} -6 \\ -3 \\ 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -11 \\ -1 \\ -8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ ,  $B = \left\{ \begin{bmatrix} 15 \\ 7 \\ -7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \right\}$ 。試求

- (a) (5%)  $\langle A \cup B \rangle$  的維度。  
 (b) (5%)  $\langle A \rangle \cap \langle B \rangle$  的維度。

這裏符號  $\langle A \rangle$  代表  $A$  中元素所造成的向量空間。

9. (10%) 設向量空間  $V$  的元素為閉區間  $[0, 1]$  上的實數值連續函數，並設  $V$  上的內積 (inner product) 為

$$(f(x), g(x)) = \int_0^1 f(x)g(x)dx。$$

試求一次多項式  $p(x) = ax + b$  使其與函數  $f(x) = x^3$  的距離最小。

注意這裏的“距離”不是指歐式距離而是指上面內積所定義的距離。

10. (10%) 一個矩陣  $A$  具有廣義反矩陣 (generalized inverse)  $B$  是指  $B$  滿足性質  $ABA = A$ 。令  $C$  與  $D$  為  $X^T X$  的兩個不同的廣義反矩陣。

試問  $XCX^T = XDX^T$  是否成立？

若“是”，請證明。若“不是”，請給反例。

這裏  $X^T$  代表矩陣  $X$  的轉置矩陣 (transpose)。